電磁気学 I
Introduction to Electromagnetism

担当：松山明彦[*1]
九州工業大学・情報工学部・物理情報工学科　　教授

(2019 年 10 月)[*2]

[*1] http://labo.bio.kyutech.ac.jp/∼matuyama/
[*2] 1 年生 V クラス「電磁気学 I」のテキスト（2019 年 8 月 1 日　改訂）

はじめに

電磁気学の初級のテキストです。高校で物理を履修していない人にも理解してもらえるように，さらに高校で物理を勉強した人にも興味を持って読んでもらえるように，ということを念頭に置いてこのテキストを書きました。少しでも物理に興味を持ってもらえればと思います。このテキストを読んで，その後，講義に出席して話を聞けばいろいろと解らないところが理解できると思います。物理って面白い，簡単ですね！となればいいのですが・・。

この講義では，電磁気学の基礎方程式である４つのマクスゥエル方程式を理解することが最終目的です。数学的記述とその意味をしっかり理解してください。さらに，日常生活でのいろいろな電磁気現象があることを学びましょう。きっと物理って面白い！と思うはずです・・。面白くないわけがない，なぜならどんな人でもサイエンスって面白いと思った経験があるはずです。いつの間にかその経験が薄れてしまっただけのことです。この講義を通して皆さんの中にある物理的直感に少しでも刺激を与えることが出来ればと思っています。

講義で使ったパワーポイント書類や、演習問題の解説や解答などは，「MOODLE」にのせる予定です。予習・復習に活用してください。各章を 2 回程度の授業で進んで行く予定です。では，頑張ってください。なにごとも，楽しんでやることが大切です。

どれか一つ，あなたの心にいつも置いてください。

1. 今眠ると夢は立ち去る。今勉強すれば夢は現実になる。
2. あなたが遅すぎたと感じたときが，まさに行動を起こす瞬間である。
3. 明日よりも今日やる方が全然よい。
4. 勉強の苦痛は一時的である。勉強しない苦痛は一生続く。
5. 今日歩くのを止めれば，明日は走らないと行けない。
6. 今日は決っして戻ってくることはない。
7. 努力なくして得るものなし。

2019 年夏
松山明彦

目次

第 1 章　電荷と電流　7

1.1　場 7

1.2　電荷 7

1.2.1　摩擦と静電気 8

1.3　クーロンの法則 9

1.3.1　クーロン力 9

1.3.2　感電には注意！ 10

1.3.3　クーロン力のベクトル表示と電場 10

1.3.4　電場の重ね合わせ 11

1.4　電気力線 12

1.5　電流 13

1.6　補足 14

1.6.1　単位 14

1.6.2　牛を球とみなして始める物理学的発想 14

1.7　演習問題 15

第 2 章　ガウスの法則　17

2.1　ガウスの定理 17

2.1.1　流線の保存則 17

2.1.2　流線の数学的表現 18

2.1.3　別府温泉のわきだし 18

2.2　電場のガウスの法則 19

2.2.1　点電荷のまわりのガウスの法則 19

2.2.2　球内に一様に電荷が分布する場合 20

2.2.3　球面上に電荷が分布している場合 21

2.3　ベクトル演算子 22

2.3.1　ベクトル演算子 22

2.3.2　場の微分 23

2.3.3　スカラー積 23

2.3.4 ベクトル積 24
2.4 ガウスの法則の微分型 25
2.5 補足 26
2.5.1 ベクトルの発散 26
2.5.2 ベクトルの回転 26
2.6 演習問題 27

第 3 章 導体と誘電体 29
3.1 導体 29
3.1.1 電位：静電ポテンシャル 30
3.1.2 電気容量 32
3.1.3 静電エネルギー 32
3.2 コンデンサー 33
3.2.1 平板コンデンサー 33
3.2.2 誘電分極 34
3.2.3 誘電率 36
3.3 電束密度 36
3.4 コンデンサーの接続 37
3.5 電気二重層 38
3.6 補足 40
3.6.1 力とポテンシャル 40
3.6.2 単位 40
3.6.3 原子の分極 41
3.7 演習問題 41

第 4 章 電流とオームの法則 43
4.1 電流 43
4.1.1 ブレーカーが落ちるとは？ 44
4.2 オームの法則 45
4.2.1 ジュール熱と起電力 46
4.3 キルヒホッフの法則 47
4.3.1 抵抗の直列接続 48
4.3.2 抵抗の並列接続 49
4.4 演習問題 50

第 5 章 電流と磁場 51
5.1 磁場に対するクーロンの法則 51
5.1.1 磁荷 51
5.1.2 磁場 52

5.2 磁性体 53
5.2.1 磁場のわきだし？ 54
5.3 アンペールの法則 54
5.3.1 ベクトルポテンシャル 58
5.3.2 ビオ・サバールの法則 58
5.4 補足 60
5.4.1 単位 60
5.5 演習問題 60

第 6 章 電磁誘導 61
6.1 ベクトルの外積 61
6.1.1 ベクトル積の方向 63
6.2 力＝電流 × 磁場 64
6.2.1 ローレンツ力 64
6.3 いろいろな電磁誘導 66
6.3.1 磁場内に置かれた導線に電流を流すと導線は動く 66
6.3.2 磁場内で電線を動かすと電流ができる 67
6.3.3 電磁誘導の式 70
6.3.4 回路が変化する場合 70
6.3.5 インダクタンスとコイル 72
6.3.6 変位電流 74
6.4 補足 75
6.4.1 交流 75
6.5 演習問題 75

第 7 章 マクスウェル方程式と電磁波 77
7.1 マクスウェル方程式 77
7.2 電磁波とマクスウェル方程式 78
7.2.1 電場 79
7.2.2 磁場 80
7.2.3 ポインティングベクトル 81
7.2.4 波の復習 82
7.2.5 電磁波 83
7.2.6 マクスウェル方程式の間の関係式 85
7.3 電磁波の反射と屈折 86
7.3.1 屈折率 86
7.3.2 反射と屈折 88
7.4 演習問題 90

付録 A　輸送現象 93
A.1　運動方程式 93
A.2　ブラウン運動 94
A.2.1　ブラウン運動の運動方程式 94
A.2.2　短時間の緩和現象 96
A.2.3　長時間の緩和現象 97
A.3　拡散現象 98
A.3.1　フィックの方程式 98
A.3.2　拡散方程式 99
A.4　補足 100
A.4.1　単位 100
A.5　演習問題 101

第 1 章

電荷と電流

電磁気学の始まりです。まず，ここでは電磁気学は何を扱うかを説明していきましょう。我々の日常生活は常に電場や磁場の中で行われています。携帯電話（スマートフォン），ラジオ電波，太陽からの紫外線や赤外線，可視光などすべて電磁気学で扱うものです。スマフォと電磁気学がどう関わってくるのでしょうか？それについて学んでいきましょう。Are you ready?

1.1　場

ここではまず電磁気学で出てくる場 (field) の概念について説明します。「場とは空間を伝わる相互作用である」と書くと少し理解出来たきがしませんか？この場には 2 種類あります。 1 つはスカラー場で，これは空間の各点に 1 つの大きさ（数）が決められたもので，圧力，温度などがあります。もうひとつはベクトル場で，空間のある点にベクトル量が存在する場のことです。電場，磁場，電磁波などがあります。以下では，スカラー場は A，ベクトル場は $\mathbf{A}$(または $\vec{A}$) の様に書くことにします。

1.2　電荷

まず，電気を知るためには電荷 (electric charge) を理解することが基本です。帯電した電気を電荷とよびます。電荷には $+$ と $-$ があります。電荷を持った粒子を荷電粒子とよびます。例えば，血液中の赤血球やコロイド粒子やタンパク質，DNA なども電荷を持った荷電粒子です。電池や電気も電荷の流れです。電子はマイナスの電荷を，陽子はプラスの電荷を持っています。

電気量の基本単位は，電気素量とよばれ e で表します。電気素量の値は

$$e = 1.60217733 \times 10^{-19}[C], \tag{1.2.1}$$

です。ここで，[C] はクーロンと読み，電荷の単位をあらわします。電気量はたとえば，10e, 22e など，電気素量の整数倍しか現れません。電子 1 個はマイナスの電荷 $-e$ を持ちます。ちなみに，電子の質量は $m_e = 9.109 \times 10^{-31}[Kg]$ であり，電子を 1[mol] 集めてもまだまだ我々には何の重さも感じないですね。

２つの電荷間には相互作用が働きます。同符号の電荷間は斥力，異符号の電荷間には引力が働きます。例えば，プラスとプラスの２つの電荷間には斥力が働きます。このような引力や斥力は我々が日常経験している電気の力です。したがって，マイナスの電荷を持った粒子は，マイナス極からプラス極の方向に移動し，電荷の流れが起こります。

1.2.1　摩擦と静電気

図 1.1　２つの物質を摩擦すると帯電する。

小学生のとき，プラスチック下敷きを髪の毛でこすると，髪の毛が逆立つことを経験したことがあると思います。２つのものをこすり合わせると摩擦によって帯電します。つまり摩擦によって物質の表面に電荷が現れます。図 1.1 は帯電する代表的な物質を示しています。例えば，髪の毛とプラスチックをこすり合わせると，プラスチックの表面はマイナスに，髪の毛の表面はプラスに帯電します。このような帯電した電荷を静電気とよびます。プラスの電荷とマイナスの電荷間には引力が働くので，下敷きと髪の毛は引っ付き合い，髪の毛が逆立ちするわけです。

冬の乾燥した日に金属のドアノブに手がさわるとビリッとしたことがあると思います。この場合は，乾燥によって金属のドアノブがマイナスに帯電し，手の表面にはプラスの電荷があらわれます。手を金属に近づけるとプラスの電荷とマイナスの電荷が引き合って電荷が移動し，一瞬電流が流れた状態になりビリッと感じるのです。稲妻も同じ原理です。雲の中にプラスの電荷がたまり，地上のマイナス電荷との間で電流が流れます。

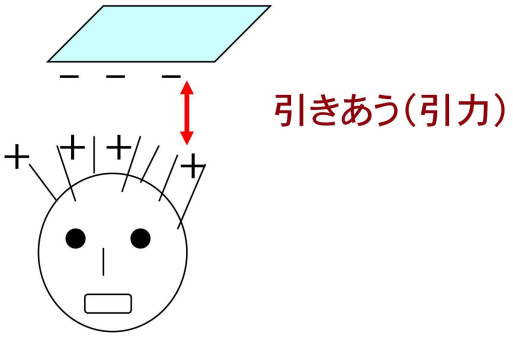

図 1.2　摩擦によって静電気が生まれる

1.3　クーロンの法則

1.3.1　クーロン力

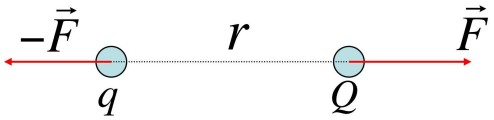

図 1.3　クーロン力（同符号の電荷の場合は斥力になる）

このような電荷間の力はクーロンの法則によって理解することが出来ます。電荷 q と電荷 Q をもつ 2 つの電荷が距離 r 離れているとき，2 つの電荷間に働く力をクーロン力とよびます。ここでは電荷は例えば，$q = 2e$ や $Q = 10e$ という値を持ちます。このクーロン力は距離の 2 乗に逆比例して

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qQ}{r^2}, \tag{1.3.1}$$

で与えられます。クーロン力 (F) は力の単位 (N：ニュートン) をもち，明らかに $qQ > 0$ のとき，つまり同符号の電荷のときは斥力であり，$qQ < 0$（異符号の電荷）のときは引力となります。前述の下敷きと髪の毛の間にはこのクーロン引力がはたらき引きつけあっているのです。距離が離れるにつれてクーロン力は弱くなります。係数 ϵ_0 は真空の誘電率であり

$$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}[C^2N^{-1}m^{-2}], \tag{1.3.2}$$

です（十二分にヤヤコシイと覚える？）。”真空の・・”と書くと真空でしか使えないかというとそうでもないのです。空気の誘電率は実は真空の誘電率とほとんど同じであることを知っておきましょう。一般に媒質の誘電率 (ϵ) と真空の誘電率の比を非誘電率 ($\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$) とよびます。例えば，空気は $\epsilon_r = 1.00059$，水は 20 ℃で $\epsilon_r = 80.4$ です。

クーロン力の係数は

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\pi\epsilon_0} &= \frac{1}{4 \times 3.14 \times 8.854 \times 10^{-12}} \\ &= 8.99 \times 10^9[C^{-2}Nm^2]\end{aligned} \tag{1.3.3}$$

であり，約 $10^{10}[C^{-2}Nm^2]$ の値をもちます。高校ではこの定数は k として覚えた人がいると思いますが，大学では必ず式 (1.3.1) の様に ϵ_0 を用いて書いて下さい。

式 (1.3.1) を具体的に計算する場合は単位系に注意してください。電磁気学では MKSA 単位系 (SI 単位系）を使って計算するのが主流です。長さはメートル (m), 質量はキログラム (Kg), 時間は秒 (s), 電流はアンペアー(A) を基本とした単位系です。1[A] の電流が 1 秒間に運ぶ電荷を 1[C] と定義します： [A]=[C/s]。

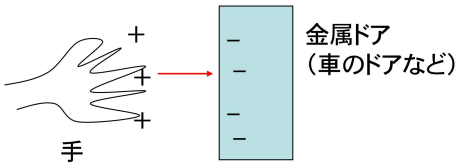

図 1.4　放電現象

1.3.2　感電には注意！

1.2.1 節でも述べたように金属に手を近づけるとビリッ！としたことがあると思います。これは手の表面がプラスに，金属表面がマイナスに帯電した状態で，手を金属に近づけるとクーロン力によってプラスの電荷とマイナスの電荷が引きつけあって電荷が金属から手に移動するためにビリッとするのです。この電荷の流れのことを電流とよびます。電流の単位はアンペア—[A] で，1[A]=1[C/s] です。

人間の身体には 50[mA] 以上の電流が流れると感電死するそうです。では何個の電荷（電子の数）が流れているか考えてみましょう。$50[mA] = 50 \times 10^{-3}[C/s]$ です。 1 個の電子の電荷は $e[C]$ なので，一秒間に

$$x = \frac{50 \times 10^{-3}[C/s]}{1.6 \times 10^{-19}[C]} = 3.1 \times 10^{17}[\text{個}/s], \tag{1.3.4}$$

個の電子が流れたことになります。感電の実態はこれらの電荷が体内に多量に供給されるためにおこるのです。冬場の感電には十分注意して下さい。

1.3.3　クーロン力のベクトル表示と電場

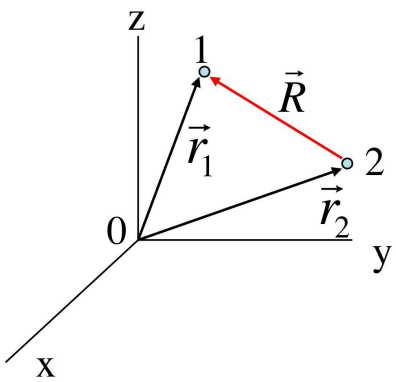

図 1.5　クーロン力のベクトル表示

クーロン力は 2 つの電荷間では斥力になったり引力になったりして，向きを持つことが解ったと思います。つまりクーロン力はベクトル量です。ここではクーロン力のベクトル表示を考えましょ

う。図 1.5 で示すように，点 1 に電荷 q と点 2 に電荷 Q が存在する場合を考えましょう。それぞれの点の位置ベクトルを $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ とすると，$\mathbf{R} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ です。今, 赤の矢印の方向にクーロン力が働いているとしましょう。点 2 から点 1 へ向く単位ベクトルは

$$\vec{e}_{21} = \frac{\vec{R}}{R}, \qquad R = |\vec{R}|, \tag{1.3.5}$$

です。点 2 の電荷 Q が点 1 の電荷 q に作用するクーロン力のベクトル表示は

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qQ}{R^2}\vec{e}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qQ}{R^2}\frac{\vec{R}}{R}, \tag{1.3.6}$$

と書けます。

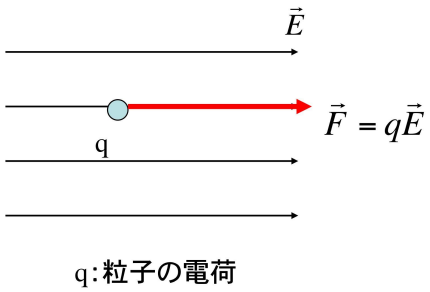

図 1.6　電荷 q に働くクーロン力

さらにこの式を書き換えて，

$$\vec{F} = q\vec{E}, \tag{1.3.7}$$

としましょう。ここで

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R^2}\vec{e}_{21}, \tag{1.3.8}$$

は電場ベクトル (electric field) とよばれています。電荷 Q が作る電場 $\vec{E}$ の中で，空間のある点に電荷 q が存在するとき，その電荷に働くクーロン力が式 (1.3.7) で与えられます。電場が電荷に作用する力をしめします。図 1.6 のように電場 $\vec{E}$ の中に電荷 q を持った粒子をおくと，その粒子には図のようにクーロン力が働きます。この場合，粒子の位置が固定されていなければクーロン力によって矢印の方向に粒子は動きます。電場の向きはプラスの電荷から出る方向を矢印の正の方向と定義します。電荷 q にはプラスの電荷とマイナスの電荷があります。もし $q < 0$ の場合は，クーロン力の方向は電場と逆になることに注意してください。

1.3.4　電場の重ね合わせ

図 1.7 に示すように空間のある点（位置ベクトル $\vec{r}_1$) のところに電荷 q_1 を持つ粒子が存在する場合を考えましょう。電荷による点 p(位置ベクトル $\vec{r}_1$) での電場は，（式 (1.3.8) を参考にして，）

$$\begin{aligned}\vec{E}_1 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^2}\frac{\vec{r}-\vec{r}_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} \\ &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}-\vec{r}_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3}\end{aligned} \tag{1.3.9}$$

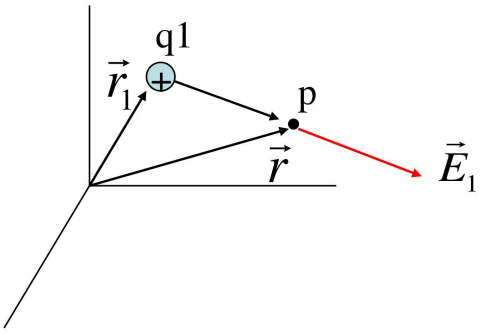

図 1.7　電荷 q_1 のつくる電場

と書けます。式 (1.3.9) はベクトル表示で書いてあるので距離の 3 乗に逆比例していますが，電場の大きさは，

$$|\vec{E}_1| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^2}, \tag{1.3.10}$$

です。では，空間中に電荷を持った粒子が 2 つある場合，任意の点での電場はどのようになるで

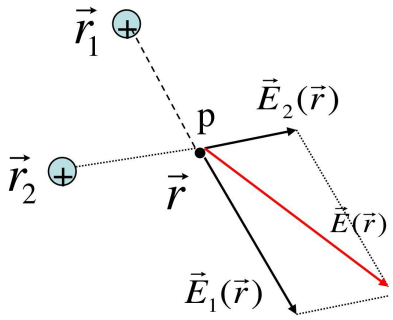

図 1.8　電場の重ね合わせ

しょうか？電場はベクトル量なのでベクトルの重ね合わせになります。図 1.8 は，空間の 2 つの点にプラスの電荷が固定されて置いてあるとき任意の点 p($\vec{r}$) に置ける電場の様子を示しています。それぞれの電荷の位置ベクトルを $\vec{r}_1$ と $\vec{r}_2$ とし，電荷を q_1 と q_2 とすると，点 p での電場は 2 つの電場のベクトル和ですから，

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_1(\vec{r}) + \vec{E}_2(\vec{r}), \tag{1.3.11}$$

となります。したがって，点 p での電場は赤の矢印の方向になります。3 つ以上電荷があっても同じ考え方で全ての電場ベクトルの重ね合わせで方向が決まります。

1.4　電気力線

電場の方向はその場所で電荷が受ける力の向きを表していて，電気力線ともよばれます（電場と同じ意味です）。電気力線の方向はプラスの電荷からマイナスの電荷に向かう方向に矢印を書きま

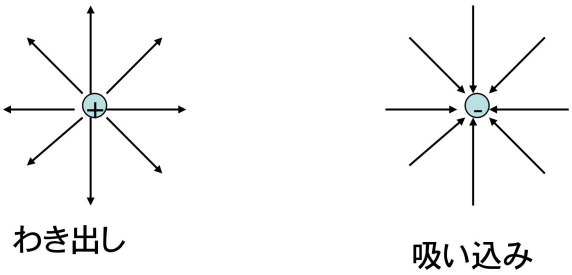

図 1.9　点電荷からの電気力線

す。点電荷の場合は無限に遠いところに反対符号の電荷が存在すると考えればよい。図 1.9 は正電荷から出ている電気力線の様子が書かれています。このような場合を電場の「沸き出し」とよびます。一方，負電荷の場合は電場は負電荷に吸い込まれているような絵が描けます。これを電場の「吸い込み」とよびます。

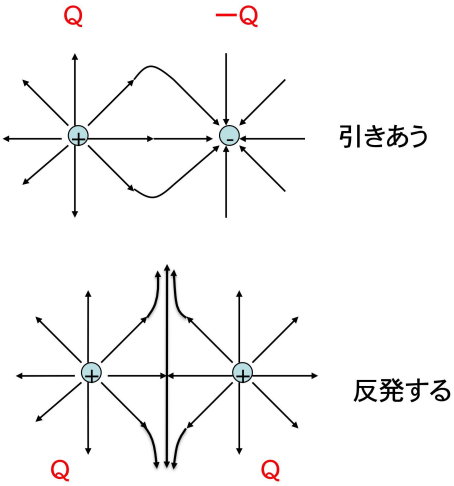

図 1.10　2 つの電荷による電気力線

電荷が 2 つある場合の電気力線の様子を図 1.10 に示します。異符号の電荷の場合，正電荷と負電荷の間はクーロン力により引力となります。同符号の場合は，クーロン力によって斥力となります。冬場はよく髪の毛がパサパサとぱさつくと思います。髪の毛の表面に正電荷がたまると，正電荷間にクーロン斥力がはたらき，髪の毛がパサパサするのです。電気力線は目にはみえませんが，このぱさつき感こそが，図 1.10 の下図で見た電気力線による反発が起こっているのです。

1.5　電流

「電流とは電荷の流れです。」図 1.11 は導線内の電荷の流れを示します。右がプラス極，左がマイナス極としましょう。一般家庭のコンセントをプラグに繋ぐと電化製品とコンセント（発電所）

の間にこのような電位の差ができます。電位の差は電場となって，導線内に電場ベクトルが図の右から左へ（赤の矢印の方向に）働きます。そうすると，式 (1.3.7) のクーロン力によって，導線内の正電荷は左へ，負電荷は右へ移動します。これが電流の起源（電荷の流れ）となります。電流の方向はプラス極からマイナス極の方向へ流れると定義されています。ちなみに電子はマイナスの電荷を持っているので，流れる方向はマイナス極からプラス極の方向です。電流の流れる方向と，電子の流れる方向は逆に定義されていることに注意してください。単位時間 Δt の間に電荷が ΔQ 流れたとき，電流は

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}, [C/s] \tag{1.5.1}$$

で与えられます。電流の単位はアンペア―[A=C/s] です。導線内の電荷がクーロン力で動かされることで電流が流れているのです。長い時間電流を流していると，導線がだんだん暖かくなってくるのを経験していると思います。これは，導線内を流れる電荷と他の粒子の間の摩擦によって熱が発生しているのです。この熱のことをジュール熱とよびます。この熱は何も使われることなくただ無駄に外界に放出されています。エネルギー効率のよい電線はこのジュール熱が少ないのですが・・。全く摩擦のない物質を超伝導体とよびます。このような超伝導体で導線が作られればエネルギー損失は少なく”エコ”な材料が作れるわけです。残念ながら抵抗をゼロにするには極低温にしないといけないので，現実的な材料としては使えないのです。たとえば，水銀では 4.19[K] でほぼ抵抗がゼロになりますが，日常生活でこんな温度には出来ませんね！

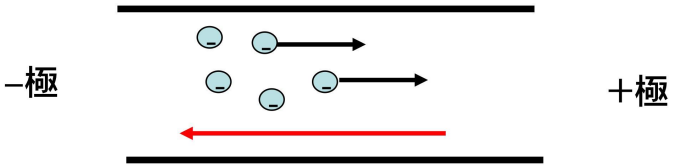

図 1.11　電流

1.6　補足

1.6.1　単位

- 電荷の単位：クーロン [C]。1[C] は，1[A：アンペア―] の電流が 1 秒間に運ぶ電荷量のことである: 1[A]=1[C/s]。

1.6.2　牛を球とみなして始める物理学的発想

小話を一つ。牛を飼育している牧場主が，経営改善するために心理学者と経営工学者と物理学者の 3 人に相談したそうです。心理学者は「まず，牧場の草をもっと豊富にして，牛がリラックスできる環境を整えることが必要ですね,」と言ったそうです。経営工学者は「牛一匹あたりの面積が広すぎます。もう少し，牛を増やして経営効率を上げることをお勧めします,」と言いました。物

理学者は,「まず牛を球と仮定しましょう。・・・・・」と・・。さて，このびっくりするような仮定から何が導かれるでしょうか？皆さんが物理学者になったつもりで，この続きを考えてみましょう。

物理学では，いろいろな仮定がでてきます。どういう仮定で物理現象を考えているかを意識することも必要です。例えば，点電荷というと，大きさな無視して電荷の大きさだけを考えています。この仮定は電荷間のクーロン力を理解するためには十分な仮定です。理想気体の状態方程式 $PV = nRT$ も，気体分子の大きさは考えていないことを思い出してください。

1.7　演習問題

1. (a) 真空中で 1[C] の 2 つの電荷が距離 0.5[m] 離れているときのクーロン力を求めましょう。
   (b) 求めたクーロン力は何リットルの水を支える力に対応しているでしょうか？
2. 1[A] では 1 秒当たり 1[C] の電荷が流れます。1[A] の電流は何個の電子の流れになるでしょうか？
3. 水素原子では原子核である陽子 (電荷 e) と，そのまわりを回っている電子（電荷 $-e$) の距離は, 0.53×10^{-10}[m] です。陽子と電子の間に働くクーロン力を求めましょう。（答え：-8.2×10^{-8}[N]）
4. 日常生活において我々は重力は認識できます。しかし，力の大きさとしては，重力に比べてクーロン力の方がはるかに大きいにもかかわらず，大きいスケールではクーロン力をあまり意識されず重力の方が意識されます。なぜでしょう？
5. 同じ大きさの電荷 q が距離 $2a$ 離れた点 A と点 B に置かれて固定されています。直線 AB の垂直 2 等分線上に自由に動ける電荷 q_1 を置きました。この電荷に働く力が最も大きくなる位置 P はどこか？（電場の重ね合わせを考えて点 P を求めましょう。）

第 2 章

ガウスの法則

前の章では，電場のわきだしや吸い込みを表すベクトルは電気力線であることを勉強しました。このような電気力線は水の流れとよく似ています。電場や水の流れをここでは一般に流線とよびます。この流線の数学的記述を勉強し，とっても重要なガウスの法則を理解しましょう。

2.1　ガウスの定理

2.1.1　流線の保存則

以下の議論は，電場でも水道の蛇口（わき出し口）から出る水でも成り立つので，しばらくは水を想像して読んでください。水は蒸発しないとすると，蛇口から出てくる水を周囲で全部集めると蛇口から出てきた水の総量になります。当たり前ですね。つまり水の量は蛇口から出てきたときと，まわりに流れたときで変化しない，つまり水の量は保存されるということが解ればいいだけです。このような保存則が電場についても成り立つのです。つまり，「電気力線の数は保存される」。

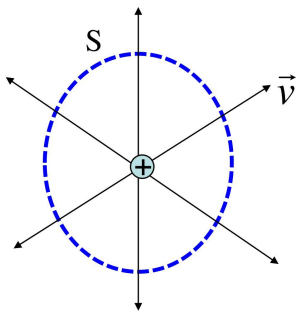

図 2.1　流れ出す流体の体積

2.1.2　流線の数学的表現

今のことを，もう少し数学的に表現してみましょう。図 2.1 に示すように中心に蛇口があり，そこから水が速度 v でわき出している状況を考えてください（もちろんこれは，電磁気学では正電荷から電場がわき出している状況に対応します）。わき出し口を囲む空間になめらかな閉曲面 S（青の点線）を考えましょう。そうすると，

$$\begin{aligned}&\text{閉曲面 } S \text{ を通って内から外へ流れ出す流体の体積}\\&=\text{閉曲面 } S \text{ の内側に含まれるわき出し口から出てくる流体の体積}\end{aligned} \tag{2.1.1}$$

が成り立ちます。前述の保存則「電気力線の数は保存される」です。

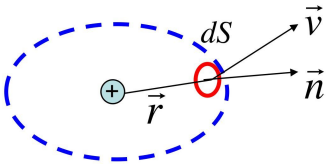

図 2.2　水の流束

左辺は数学的に以下のように考えることが出来ます。図 2.2 に示したように，中心から距離 $\vec{r}$ にある点での水の速度を $\vec{v}(\vec{r})$ とし，その点での微少面積 dS の外向きの法線単位ベクトルを $\vec{n}$ とします。このとき微少面積 dS を通って単位時間に流れ出す水の量は

$$\vec{v}(\vec{r})\cdot\vec{n}dS, \tag{2.1.2}$$

で与えられます。閉曲面 S 全体にわたって積分すると，

$$\int_S \vec{v}(\vec{r})\cdot\vec{n}dS = \text{閉曲面 } S \text{ の内側に含まれるわき出し口から出てくる流体の体積}^{*1} \tag{2.1.3}$$

の関係式が成り立ちます。これが，ガウスの定理です。左辺の数学的意味が理解できるように努力してください。

2.1.3　別府温泉のわきだし

別府温泉の温泉口からわき出る温泉の数学的表現はまさにガウスの定理を表しています。図 2.3 のように，わき出し口から距離 r 離れた点（青い点線）で流れ出る温泉の水を集めると，わきだし口から出てくる水の総量になりますね。これを数学的にあらわしたのが，式 (2.1.3) です。別府温泉で温泉の湧き出し口を見つけたらガウスの定理を思い出しましょう。

*1 $\int_S$ は面積積分を示す。

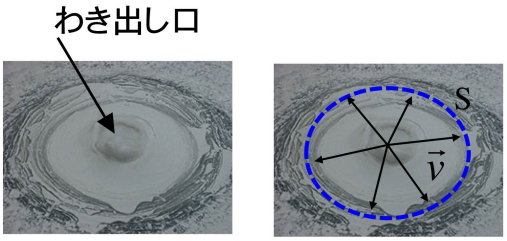

図 2.3　温泉のわき出し口とガウスの定理

2.2　電場のガウスの法則

式 (2.1.3) において，水の速度 $\vec{v}$ を電場 $\vec{E}$ に置き換えると，電場に対するガウスの法則が成り立ちます。

$$\epsilon_0 \int_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n} dS = \text{閉曲面 } S \text{ の内側に含まれる電荷の総和} \tag{2.2.1}$$

ここで，ϵ_0 は電磁気学の単位系にするために付けてあります。左辺は，閉曲面 S を貫く電気力線の総数です。つまり電気力線を集めると中にある電荷の大きさが解るのです。逆も真なり。

以下では，このガウスの法則を使っていろいろな電場を求めてみましょう。

2.2.1　点電荷のまわりのガウスの法則

点電荷 q のまわりの電場をガウスの法則 (式 (2.2.1)) を使って計算してみよう。図 2.4 に示したように，中心に正電荷 q があるとき，その中心から距離 r の位置における電場の大きさを求めましょう。皆さんはこの答えはすでに 2 章で勉強したので答えられるはずですが，ここではガウスの法則を用いて同じ結果を導いてみましょう。

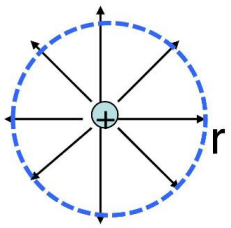

図 2.4　点電荷 q のまわりの電場

中心に正電荷 q が存在していて，中心から半径 r の球面を考えましょう。ガウスの法則から式 (2.2.1) の右辺は，半径 r の球面の内側にある電荷の総和になります。明らかに電荷は点電荷 q だけしか存在しないので，

$$\epsilon_0 \int_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n} dS = q \tag{2.2.2}$$

となります。左辺を計算すると，球面では常に $\vec{E}$ と $\vec{n}$ は平行なので，

$$\epsilon_0 \int_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n} dS = \epsilon_0 \int_S |\vec{E}||\vec{n}| \cos(0) dS = \epsilon_0 E(r) \int_S dS = \epsilon_0 E(r) 4\pi r^2 \tag{2.2.3}$$

となります。ここで，$E(r) = |\vec{E}|$ は電場の大きさ（スカラー）を示します。最後の積分 $\int dS$ は半径 r の球の表面積です。式 (2.2.2) と式 (2.2.3) より，

$$\epsilon_0 E(r) 4\pi r^2 = q \tag{2.2.4}$$

が成り立ちます。したがって，この式を変形すると，中心から距離 r における電場は

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}, \tag{2.2.5}$$

となります。これは，２章で得た結果と同じであることを確認してください（2 章をもう一度読みましょう)。

2.2.2　球内に一様に電荷が分布する場合

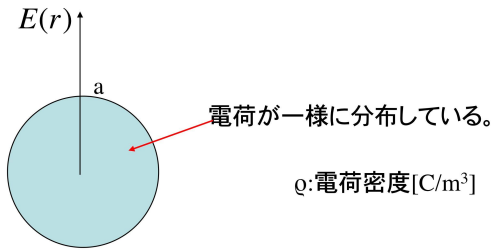

図 2.5　球内に一様に電荷が分布する場合

もうひとつ計算しておきましょう。ここでは, 半径 a の球内に一様に電荷密度 $\rho[C/m^3]$ で電荷が分布しているとき，球の中心からの距離 r の関数として電場を求めましょう。半径 a の内側の電荷の総和 (Q) は

$$Q = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho \quad [C], \tag{2.2.6}$$

です。球の中心から距離 r での電場 $E(r)$ をガウスの法則を使って求めましょう。距離が $r < a$ と $r > a$ の 2 つの場合について分けて考える必要があります。

まず，(1) $r < a$ のときを考えましょう。前と同じように半径が r の球面を考えましょう。ただし，$r < a$ であることに注意して，図 2.5 の中に半径 r の円を点線で描いてください。そうすると半径 r の点線の球の内側にある電荷の総和は $\frac{4}{3}\pi r^3 \rho$ となります。したがって，ガウスの法則

$$\epsilon_0 \int_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n} dS = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \tag{2.2.7}$$

が成り立ちます。左辺は式 (2.2.3) を用いて計算されるので，したがって，

$$E(r) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^3} r, \tag{2.2.8}$$

となります。最後の式は全電荷 Q を用いて表しています。$r < a$ のとき電場は距離 r に比例して大きくなる。電荷が一様に分布しているので半径が増加するとその内側にある電荷は増加します。

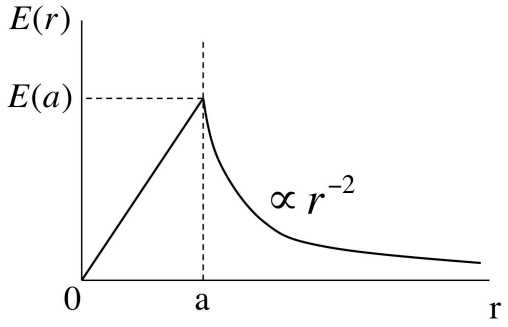

図 2.6　球内に一様に電荷が分布する場合の球の中心から距離 r での電場 $E(r)$

次に (2) $r > a$ のときを考えましょう。$r > a$ であることに注意して，図 2.5 に半径 r の球を点線で描いてください。その点線の球の内側にある電荷の総和は Q です。どれだけ大きい球を描いても，内側にある電荷は Q 以外はありません。したがって，ガウスの法則

$$\epsilon_0 \int_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n} dS = Q, \tag{2.2.9}$$

がなりたちます。左辺は式 (2.2.3) で計算されるので，したがって，

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \tag{2.2.10}$$

となります。$r > a$ では電場は距離の 2 乗に逆比例して小さくなります。式 (2.2.8) と式 (2.2.10) を図示すると図 2.6 のようになります。$r = a$ での電場は

$$E(a) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2}$$

です。

2.2.3　球面上に電荷が分布している場合

ここでは，半径 a の球面上に表面電荷密度 $\rho_s[C/m^2]$ で電荷が一様に分布しているとき，球の中心からの距離 r の関数として電場 $E(r)$ を求めましょう。この問題では，電荷は球の表面上にだけ存在していることに注意してください。球の中は空洞になっている状況です。したがって内部には電荷は存在しません。球の表面の全電荷 Q は

$$Q = 4\pi a^2 \rho_s \quad [C], \tag{2.2.11}$$

です。前問と同じように，$r < a$ と $r > a$ の場合を考える必要があります。

$r < a$ のとき，半径が r の球面を考えましょう。ただし，$r < a$ であることに注意して，図 2.7 の中に半径 r の球を点線で描いてください。そうすると半径 r の点線の球の内側にある電荷の総和

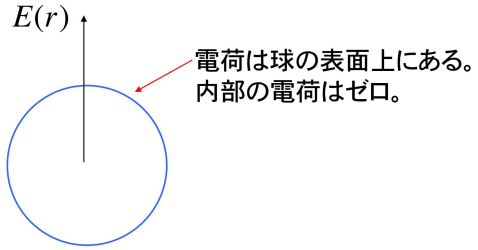

図 2.7　半径 a の球面上に表面電荷密度 $\rho_s[C/m^2]$ で電荷が一様に分布している

は 0 ですね。この球の中には電荷は存在しません。したがって，

$$\epsilon_0 \int_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n} dS = 0, \tag{2.2.12}$$

がなりたちます。左辺は式 (2.2.3) で計算されるので，$r < a$ では，

$$E(r) = 0, \tag{2.2.13}$$

となります。

次に，$r > a$ の場合について考えましょう。$r > a$ であることに注意して，図 2.7 に半径 r の球を点線で描いてください。その点線の球の内側にある電荷の総和は Q です。したがって，ガウスの法則から

$$\epsilon_0 \int_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n} dS = Q, \tag{2.2.14}$$

がなりたちます。左辺は式 (2.2.3) で計算されるので，$r > a$ では，

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \tag{2.2.15}$$

となります。得られた電場，式 (2.2.13) と式 (2.2.15) を図示してください（図 2.6 の様な図を書きましょう)。

2.3　ベクトル演算子

ここでは，以降で使うベクトル演算子について紹介しておきます。物理現象の数学的記述の理解のためには，ベクトル演算子はとっても重要です。

2.3.1　ベクトル演算子

ある関数 $f(x, y)$ にたいして，偏微分 $(\partial f/\partial x)_y$ は，y を一定に保って関数 $f(x, y)$ を x で微分することを意味します。ここでベクトル演算子を紹介しましょう。ベクトル演算子 ($\vec{\nabla}$：ナブラと読む) とは

$$\vec{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) \tag{2.3.1}$$

で定義されたベクトルです。普通のベクトルと少し違うところは，ベクトルの成分が偏微分になっているところです。例えば $\vec{\nabla}$ の x 成分は $\partial/\partial x$ です。つまり x で偏微分することを意味します。ベクトル表示で書けば，

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}, \tag{2.3.2}$$

と書けます。ここで，$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ はそれぞれ，x, y z 軸の単位ベクトルをしめします。ベクトル演算子ナブラ $\vec{\nabla}$ の右に何かを作用させないと意味がありません。右に作用させるものは任意のスカラー量かベクトル量です。以下で各場合について調べていきましょう。

2.3.2　場の微分

ベクトル演算子 ($\vec{\nabla}$) と，任意のスカラー量 $V(r)$ とのかけ算は

$$\vec{\nabla}V(r) = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}, \tag{2.3.3}$$

となります。これは，場の微分と呼ばれ勾配（傾き）を意味するベクトル量です。場の微分 $\vec{\nabla}V(r)$ は，grad V と書いたりします。grad は勾配 (gradient) の意味を持ちます。通常のベクトル $\vec{A}$ に定数（スカラー量）V を掛ける計算と同じであることがわかりますか？つまり，ベクトル $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ に定数 V を掛けると，

$$\vec{A}V(r) = A_xV\vec{i} + A_yV\vec{j} + A_zV\vec{k}, \tag{2.3.4}$$

となります。ベクトル $\vec{A}$ の各成分をベクトル演算子の各成分で置き換えると，式 (2.3.4) は式 (2.3.3) になります。以下の計算も同じです。通常のベクトルの内積や外積が演算子に置き換わるだけです。いろいろと意味は違ってきますが。

2.3.3　スカラー積

ベクトル演算子 ($\vec{\nabla}$) はベクトル量であるので内積が計算できます。例えば，ベクトル $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ との内積は

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \tag{2.3.5}$$

となります。通常の $\vec{A}$ と $\vec{B}$ の内積と同じように，ベクトルの各成分を掛け合せた計算なので，スカラー量となります。$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$ のことを，スカラー積または，ベクトル $\vec{A}$ の発散とよびます。。$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$ は，div $\vec{A}$ と書くときもあります。div は発散 (divergence) や，わき出しの意味をもちます[*2]。

[*2] 補足 (3.5.1) を参照

2.3.4　ベクトル積

2 つのベクトルの外積と同じようにナブラを使った外積も考えましょう。計算すると，

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}$$
$$=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k} \tag{2.3.6}$$

となります。これをベクトル積とよびます。ベクトル $\vec{A}$ の回転を意味します。もちろんベクトル量です。あるいは，rot $\vec{A}$ と書いたりもします。rot は回転 (rotation) の意味を持ちます[*3]。

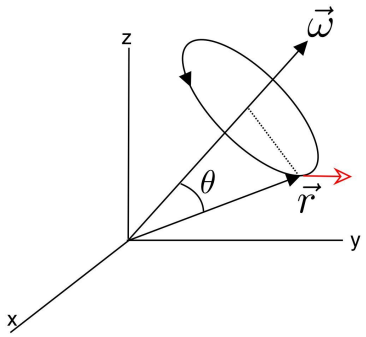

図 2.8　ベクトルの回転

図 2.8 のように，角速度ベクトル $\vec{\omega}=(\omega_x,\omega_y,\omega_z)$ で回転する物質内の点 $\vec{r}=(x,y,z)$ の速度は

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{r}, \tag{2.3.7}$$

で与えられます。この図の場合，左回転であることがわかりますか？点 $\vec{r}$ における速度のベクトル積を計算すると，

$$\vec{\nabla}\times\vec{v}=2\vec{\omega}, \tag{2.3.8}$$

となります。速度場 $\vec{v}$ の rot は回転軸の向きにあり，その大きさは角速度の 2 倍に等しくなります。

$\phi(x,y,z)$ をスカラー場とするとき，場の微分 $\vec{\nabla}\phi$ の回転を調べると，

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\phi=0, \tag{2.3.9}$$

となります。あるベクトル場 $\vec{B}$ がいたるところで，

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=0, \tag{2.3.10}$$

であるとき，この場を渦なしの場といい，

$$\vec{B}=-\vec{\nabla}\phi, \tag{2.3.11}$$

であるような関数 ϕ が必ず存在します。ϕ は速度ポテンシャルとよばれています。

[*3] 補足 (3.5.2) を参照

2.4　ガウスの法則の微分型

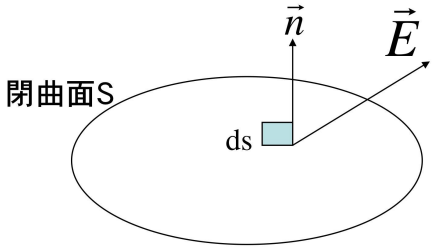

図 2.9　ガウスの定理

前節では，電場に対するガウスの法則を導きました。特に，重要なのは式 (2.2.1) で，これはガウスの法則の積分型です。ここではガウスの法則のもう一つの表現である微分型を導きましょう。

一般に，面積積分を体積積分に変換することが出来る場合があります。ここでは，証明はしませんが，図 2.9 のような，閉曲面 S とそれに囲まれる体積 V におけるベクトル場 $\vec{E}$ の面積積分と体積積分の間には次の恒等式（ガウスの定理）が成り立ちます（ここでは，面積積分を体積積分に変換する数学公式がある，ということだけでも覚えておくと良いと思います。証明は図書館で本を探して読んでください)。

$$\int_S \vec{E}\cdot\vec{n}ds = \int_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{E})dV, \tag{2.4.1}$$

ここで，$\vec{n}$ は法線単位ベクトルです。右辺の $\int_V$ は体積積分を示します。右辺に先ほど勉強したナブラがでてきます。この式を使ってもう一度，式 (2.2.1) を考えてみましょう。

空間に電荷 Q をもった点電荷が一個ある場合を考えましょう。図 2.4 と同じように中心から半径 r の球面上で電場 $(\vec{E})$ を集めましょう。ガウスの法則から

$$\epsilon_0 \int_S \vec{E}(\vec{r})\cdot\vec{n}dS = Q \tag{2.4.2}$$

がなりたちます（図 2.4 をもう一度復習してください)。左辺は式 (2.4.1) のガウスの定理から面積積分を体積積分に変換することができて

$$\epsilon_0 \int_S \vec{E}(\vec{r})\cdot\vec{n}ds = \epsilon_0 \int_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{E})dV, \tag{2.4.3}$$

となります。一方，式 (2.4.2) の右辺は，電荷 Q は電荷密度を ρ とすると，

$$Q = \int_V \rho dV, \tag{2.4.4}$$

となります。式 (2.4.3) の右辺と式 (2.4.4) の右辺は同じものなので，

$$\epsilon_0 \int_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{E})dV = \int_V \rho dV, \tag{2.4.5}$$

がなりたつことがわかります。両辺とも体積積分ですから，積分の中身を比べると

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0, \tag{2.4.6}$$

です。つまり，電場の沸きだしや，吸い込み（別府温泉の湧き出し口）を微分型で表現すると，式 (2.4.6) となります。微分型の方が覚えやすいですね。これをガウスの法則の微分型とよびます。この式は電磁気学を構成する 4 つのマクスウェル方程式の一つです。授業ではあと 3 つ出てくるよ！

2.5　補足

2.5.1　ベクトルの発散

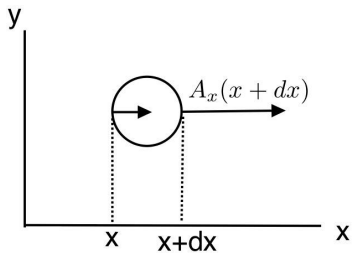

図 2.10　ベクトルの発散

式 (2.3.5) が発散を意味する理由をもう少し説明しておきましょう。図 2.10 のように，x 方向の流れ $A_x(x)$ が，ある小さい領域（図中の丸の部分）を通過した後の流れを $A_x(x+dx)$ とすると (dx は十分小さいとする)，

$$\frac{A_x(x+dx) - A_x(x)}{dx} = \frac{\partial A_x}{\partial x}, \tag{2.5.1}$$

は図中の丸の部分を過ぎた後の流量の増分です。y 方向，z 方向にも同様で，全部加算すると，図中の丸の部分からのわき出しを意味します。もちろん何もわき出しがなければゼロですよ。

2.5.2　ベクトルの回転

式 (2.3.6) が回転を意味する理由をもう少し説明しておきます。図 2.11 のように水中に水車がありその両側を水が流れているとしましょう。いま，水の流速ベクトルを $\vec{A}$ とします。まず図 2.11(a) のように y 軸方向に流れる場合を考えましょう。水車の右側の流速は $A_y(x+dx)$，左側の流速は $A_y(x)$ で与えられます。ここでは右側の流速の方が速く dx は十分小さいとすると，

$$\frac{A_y(x+dx) - A_y(x)}{dx} = \frac{\partial A_y}{\partial x}, \tag{2.5.2}$$

は水車の回転速度となります。今の場合，左回転を正に定義しました。同じように，図 2.11(b) のように x 軸方向に流れる場合を考えましょう。水車の上側の流速は $A_x(y+dy)$，下側の流速は

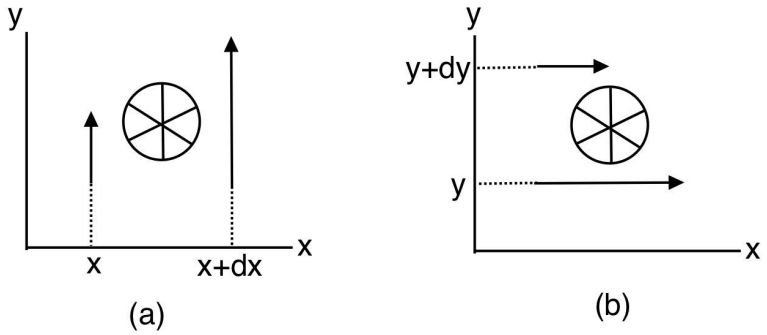

図 2.11　ベクトルの回転

$A_x(y)$ で与えられます。dy は十分小さいとすると，

$$\frac{A_x(y+dy)-A_x(y)}{dy} = -\frac{\partial A_x}{\partial y}, \tag{2.5.3}$$

がなりたちます。マイナスは左回りを正にしているためにつく。以上を加算すると，結局

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = (\vec{\nabla}\times\vec{A})_z, \tag{2.5.4}$$

は z 軸を回転軸とした水車の左回りの回転速度となります。x 軸，y 軸についても同じように考えれば $(\vec{\nabla}\times\vec{A})$ の各成分について回転を示すことが解ると思います。一様な回転では，

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} = -\frac{\partial A_x}{\partial y}$$

が成り立ちます。

2.6　演習問題

1. 点電荷 q のまわりの電場をガウスの法則 (式 (2.2.1)) を使って計算してみよう。
2. 半径 a の球内に一様に電荷密度 $\rho[C/m^3]$ で電荷が分布しているとき，球の中心からの距離 r の関数として電場を求めましょう。得られた結果の電場と距離の関係を図示しましょう。
3. 半径が a の球面上に一様に電荷密度 $\rho_s[C/m^2]$ で電荷が分布しているとき、球の中心からの距離を r としての電場を求めましょう。得られた結果の電場と距離の関係を図示しましょう。
4. 半径 a の球内に電荷密度 $\rho[C/m^3]$ の負電荷が一様に分布し，その中心に正の点電荷 Q_1 があるとき，この球内外の電場を球の中心からの距離 (r) の関数で求めましょう。得られた結果の電場と距離の関係を図示しましょう。
5. 原点に置かれた点電荷が、原点から距離 $\vec{r}$ の点 $\mathrm{P}(x,\,y,\,z)$ につくる電場は

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\frac{\vec{r}}{r},$$

です。ここで、$r = (x^2 + y^2 + x^2)^{1/2}$, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ です。点 P におけるわき出し $(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})$ を計算しましょう。またその意味を考えてください。

6. 原点から距離 R の点 P(x, y, z) の位置ベクトルは $\vec{R} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ です。以下の計算を行いその意味について考えましょう。
   (a) 場の微分：$\vec{\nabla} R$, ここで，R はベクトル $\vec{R}$ の大きさです。
   (b) スカラー積：$\vec{\nabla} \cdot \vec{R}$
   (c) ベクトル積：$\vec{\nabla} \times \vec{R}$
7. 式 (2.3.8) を確かめましょう。
8. 式 (2.3.9) を確かめましょう。

第 3 章

導体と誘電体

世の中には様々な物質があります。ここでは電気を良く通す物質（導体）と電気を通さない物質（絶縁体や誘電体）について学びましょう。これらを使った最も有名な電気部品がコンデンサーです。

3.1　導体

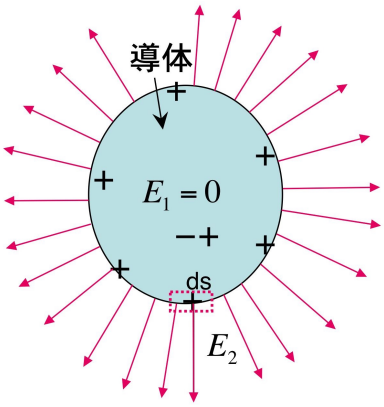

図 3.1　導体の電場

金属や電解質溶液のように電気をよく通す物質のことを導体 (conductor) とよびます。図 3.1 は導体内の電荷の分布を示します。導体内では電子が自由に動くことが出来，正負の電荷が電気的に釣り合っていて電場はゼロ $E_1 = 0$ になっています。電荷は表面だけに存在します。導体の微小表面 (ds) の電場 E_2 は表面電荷密度を $\sigma[C/m^2]$ とすると，ガウスの法則から

$$\epsilon_0 E_2 ds = \sigma ds$$

がなりたちます。従って導体表面には

$$E_2 = \sigma/\epsilon_0 \tag{3.1.1}$$

の電場が存在します。電場の方向は表面に垂直（等電位面[*1]に垂直）です。

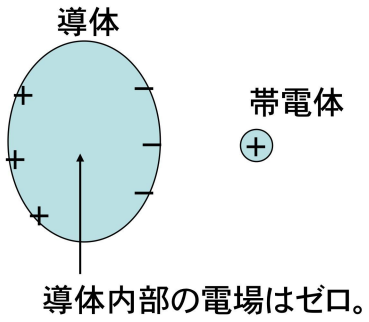

図 3.2　静電誘導

このような導体に電荷を近づけると導体内の電荷（イオンや電子など）が移動して表面に電荷が現れます。このような現象を静電誘導とよびます。図 3.2 は導体に帯電体（たとえば正電荷を持った粒子）を近づけると，電子や正電荷が移動して図のように，プラスの電荷をもつ帯電体に近い表面はマイナスに，反対の部分はプラスの電荷が表面に集まってきます。導体内部は電気的に釣り合っているので電場はゼロです。導体内の電場はゼロなので，ガウスの法則により，導体内部でどのような閉曲面を考えてもその内側の電荷量はゼロです。つまり導体には表面にだけ電荷が存在するのです。金属などの導体では負電荷をもった電子（伝導電子）が自由に動けるので，これが電流の起源となります。

3.1.1　電位：静電ポテンシャル

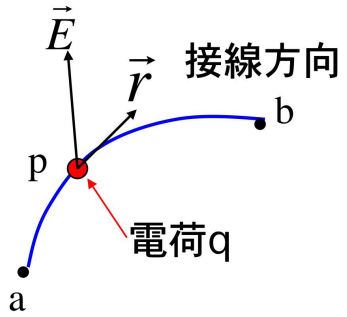

図 3.3　電場のする仕事

ここでは電位について学びましょう。図 3.3 のように電場 $\vec{E}$ の下で点 a から点 b へ電荷 q を動かす場合を考えましょう。a から点 b へ電荷を運ぶ仕事は，その道に沿って

$$\vec{E} \cdot d\vec{r}$$

[*1] 次の節で説明する

で定義されます。これを点 a から点 b まで積分して符号を変えたものが仕事量 W

$$W = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r}, \tag{3.1.2}$$

です。この仕事のことを電位（静電ポテンシャルともいう）とよびます。したがって一般に，位置 r_a から距離 r 離れたところでの電位は

$$V(r) = -\int_{r_a}^r \vec{E} \cdot d\vec{r}, \tag{3.1.3}$$

で与えられます。電荷は点電荷として，電場の方向と同じ方向に $(\vec{E}//d\vec{r})$ 動かすと，式 (3.1.3) は

$$V(r) = -\int_{r_a}^r \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int_{r_a}^r \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}dr = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r}\right), \tag{3.1.4}$$

となります。ここで基準点の点 a を無限遠にすると $(r_a = \infty)$，点 b の位置 r での電位は

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}, \tag{3.1.5}$$

で与えられます。

電位は通常無限遠をゼロとしているので，式 (3.1.3) から，

$$V(r) = -\int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r}, \tag{3.1.6}$$

で定義されています。

式 (3.1.6) の両辺を r で微分すると，電位の微分型

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(r), \tag{3.1.7}$$

が得られます。電場は電位の勾配の意味を持ちます。

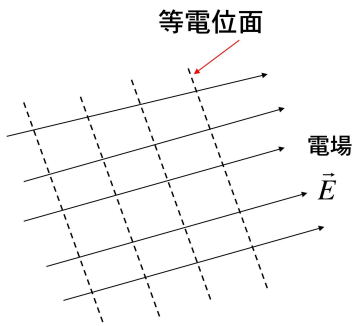

図 3.4　電場に垂直な面を等電位面という

図 3.3 で点 a と点 b が極めて接近しているとき，その間では電場は一定であると考えることができます。電場 $\vec{E}$ と垂直に電荷を $d\vec{r}$ 方向に動かすと，

$$\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r} = \vec{E} \cdot d\vec{r} = V(r_a) - V(r_b) = 0, \tag{3.1.8}$$

がなりたちます 。 $\vec{E}\cdot d\vec{r}=0$ を満たす面を等電位面とよぶ。等電位面上では電位差がないことを示します。つまり，電場に垂直に電荷を動かす場合は仕事はゼロになります。図 3.4 は電場に垂直な等電位面を示しています。

3.1.2　電気容量

導体球がもつ電位をもとめましょう。導体球の半径を a, 導体球のもつ電荷を Q としましょう。無限遠から電場にそって電荷を球の中心まで持ってきたときの仕事を考えればよいわけです。導体球から無限に離れたところを電位ゼロに定義されているので，式 (3.1.6) から導体球の電位は，

$$V=\int_r^\infty \vec{E}\cdot d\vec{r}=\int_r^a 0dr+\int_a^\infty \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}dr, \tag{3.1.9}$$

で与えられます。導体球の内側の電場はゼロなので，式 (3.1.9) の第 1 項はゼロになります。第 2 項は $r>a$ での電場の値を示します。したがって，

$$V=\int_a^\infty \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}dr=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \tag{3.1.10}$$

となり，電荷 Q と電位の V の間には

$$Q=4\pi\epsilon_0 aV \tag{3.1.11}$$

がなりたちます。

一般に導体間の電位差を 1V 上昇させるのに必要な電気量（電荷量）Q は，

$$Q=CV \tag{3.1.12}$$

で定義されて，定数 C を電気容量（キャパシター）とよびます。電気容量の単位は ファラッド [F] で，1[F]=1[C/V] です。式 (3.1.11) から，半径 a の導体球がもつ電気容量は

$$C=4\pi\epsilon_0 a \tag{3.1.13}$$

で与えられます。$a=1[m]$ のとき，$C=1.1\times10^{-11}[F]$ となります。

3.1.3　静電エネルギー

原点に点電荷 Q_1 があり，無限遠から点電荷 Q_2 を距離 R まで近づけたとすると，移動に必要な仕事は，

$$W=-\int_\infty^R F(r)dr=-\int_\infty^R \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{r^2}dr=\frac{Q_1Q_2}{4\pi\epsilon_0 R}, \tag{3.1.14}$$

となります。$F(r)$ は 2 つの電荷間のクーロン力です。この仕事はエネルギーとして蓄えられ，これを静電エネルギー (U) と呼びます。クーロン相互作用している粒子の静電エネルギーは

$$U=\frac{Q_1Q_2}{4\pi\epsilon_0 R}, \tag{3.1.15}$$

となります。

3.2　コンデンサー

導体を使った電機部品としてコンデンサーがあります。コンデンサーは電気を蓄えておくことができます。カメラのフラッシュやテレビ，電話などあらゆる電化製品に使われています。ここではコンデンサーの仕組みを簡単に勉強しましょう。これまでに習った電磁気学がいろいろなところで具体的に使われています。

3.2.1　平板コンデンサー

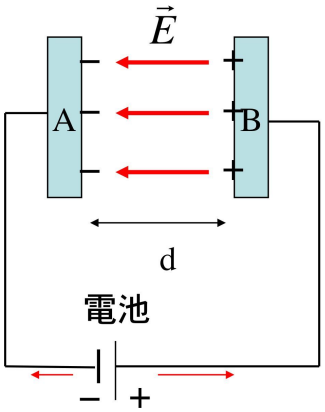

図 3.5　平板コンデンサー

平板コンデンサーは 2 つの導体間で電気（電荷）を蓄えることができます。2 つの導体を距離 d 離して電池につなぐと，電池から電荷が移動して電流が流れ，極めて短い時間で導体表面に電荷がたまり，電流は流れなくなります。どのくらいの電荷が貯めるかは後述するコンデンサーの静電容量によります。図 3.5 は A の極坂にはマイナスの電荷，B の極坂にはプラスの電荷がたまっている状況を示します。通常平板間は $d = 1[mm]$ 以下のきわめて狭い距離です。電池を外しても導体表面には電荷がたまっているので電気を極坂間にためることが出来ます。これがコンデンサー（蓄電器）です。極坂間には正から負の方向へ電場 $(\vec{E})$ が存在します。プラスとマイナスの電荷間にはクーロン力が働いているので，電池を取り除いても電荷は残っています。コンデンサーの表面の電荷は内部の反対符号の電荷とクーロン力によって強く結びついているので，コンデンサーを通して電流は流れません（6 章ではコンデンサーを流れる電流も取り扱います）。

導体（極坂）にある表面電荷密度を $\pm\sigma[C/m^2]$ とすると，極坂B（プラス）から極坂A（マイナス）へ向かう電場の強さは，式 (3.1.1) より，

$$E = \sigma/\epsilon_0, \tag{3.2.1}$$

で与えられます。極坂の面積を S とすると，

$$Q = \sigma S = \epsilon_0 SE, \tag{3.2.2}$$

が極板間に蓄えられる電気量（電荷）です。したがって，両極板間の電位差は

$$V = V_A - V_B = \int_A^B E dx = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d, \tag{3.2.3}$$

となります。そうすると，平板コンデンサーの静電容量は式 (3.2.3) をもちいて，

$$C = \epsilon_0 S/d, \tag{3.2.4}$$

となります。極板の面積が大きいほど，また極板間の距離が小さいほど容量は増加ことがわかる（電気がたまる）。最も簡単なコンデンサーはアルミホイルなどをぐるぐると巻いて，電池につなげば作れます。しかし，感電には注意してください。

平行平板コンデンサーの静電エネルギーは，電荷を Q から $Q + \Delta Q$ の増加させるために電池が $V\Delta Q$ の仕事をする，ということから求められます:

$$U = \int_0^\infty V dQ = \int_0^\infty \frac{Q}{C} dQ = \frac{Q^2}{2C}. \tag{3.2.5}$$

ここで，コンデンサー間の電場 $E = \sigma/\epsilon_0 = Q/\epsilon_0 S$, $C = \epsilon_0 S/d$ を用いて書き換えると，

$$U = Sd\frac{\epsilon_0 E^2}{2}, \tag{3.2.6}$$

となります。Sd は体積の次元なので，単位体積あたり

$$u = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}, \tag{3.2.7}$$

の静電エネルギーがあることを示しています。静電場が持つエネルギーです。

3.2.2　誘電分極

プラスチックやガラスなどの電気を通さない物質を絶縁体や誘電体 (dielectric) とよびます。このような絶縁体をコンデンサーの電極間におくと，とても不思議なことがおこります。

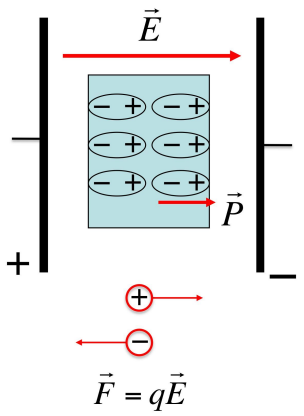

図 3.6　誘電分極：コンデンサー内の電場 E によって，絶縁体内の正電荷は右へ，負電荷は左へ移動する。

図 3.6 は極板間に絶縁体を入れた状態を示します。左の導体がプラス極，右の導体がマイナス極に帯電している状態です。ここに絶縁体を入れると，絶縁体内に電荷の移動が起こります。つまり電場 E によって絶縁体内の電荷がクーロン力 ($\vec{F} = q\vec{E}$) によって，正電荷は右に，負電荷は左に移動して，図に示したように正負の電荷に分かれます。これを分極とよびます。もともと絶縁体内部の正負の電荷はばらばらで電場ゼロの状態であったが，クーロン力によって絶縁体内部で分極が起こり，絶縁体表面に電荷が現れるわけです。この現象を誘電分極という。誘電分極を起こす絶縁体を誘電体とよびます。分極によって絶縁体表面に現れた電荷を分極電荷とよびます。この分極の度合いと方向を示すものを分極ベクトル $\vec{P}$ とよび，

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}, \tag{3.2.8}$$

で与えられます。ここで χ は分極率です。誘電体内部の電場の大きさは，分極によって

$$E = \frac{\sigma - P}{\epsilon_0}, \tag{3.2.9}$$

となります。分極ベクトルの大きさ $P = \epsilon_0 \chi E$ を代入すると

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0(1+\chi)}, \tag{3.2.10}$$

がえられます。式 (3.2.1) と比べると，絶縁体を入れると極板間の電場は $1/(1+\chi)$ 倍がけ弱くなることがわかります。したがって，極板間の電位は

$$V = Ed = \frac{\sigma d}{\epsilon_0(1+\chi)}, \tag{3.2.11}$$

となります。コンデンサーの全電荷 Q は電気容量を C として，

$$Q = CV = C\frac{\sigma d}{\epsilon_0(1+\chi)}, \tag{3.2.12}$$

とかけます。また，コンデンサーの全電荷は $Q = \sigma S$ なので，式 (3.2.12) に代入すると，コンデンサーの静電容量は

$$C = \frac{S}{d}\epsilon_0(1+\chi), \tag{3.2.13}$$

となります。

式 (3.2.4) の結果と比べると，絶縁体を入れることでコンデンサーの容量が $(1+\chi)$ 倍増加することがわかります。つまり，アルミホイルだけでコンデンサーを作るより，アルミホイルの間に紙（絶縁体）などを挟んでぐるぐると巻いていく方が容量の大きなコンデンサーが出来るのです。図 3.7 はいろいろなコンデンサーを示します。コンデンサーの表面には容量などが書かれています。例えば図中の一番大きなコンデンサーは容量が $C = 1000[\mu F]$ です。50[V] の電位を与えることで，$0.05[C]$ の電荷をためることが出来ます（電子何個分に対応するでしょうか？）。このようなコンデンサーは様々な電化製品の部品として使われています。最近はあまり見かけませんが，ブラウン管テレビのフタをあけると様々なコンデンサーを見ることが出来ました。ウッカリさわってビリッと感じたことが何度かありました。そうですコンデンサーは電気がたまっているのです。さ

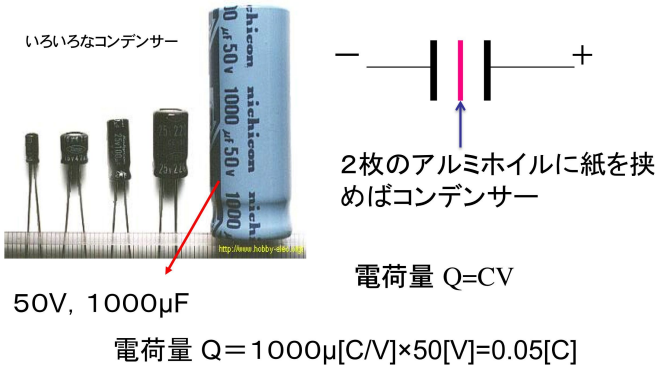

図 3.7　いろいろなコンデンサー

わった瞬間，その電気は我々の体の中に流れます。気をつけましょう。プロの電気屋は，静電気防止器具を腕にはめて作業します。みなさんも，もしなんか電化製品を修理するときは静電気に注意しましょう。特に大きなコンデンサーには注意が必要です。これって，まさに教養ですね！

3.2.3　誘電率

式 (3.2.13) を

$$C = \frac{S}{d}\epsilon, \tag{3.2.14}$$

とかいて，

$$\epsilon = \epsilon_0(1+\chi), \tag{3.2.15}$$

を誘電率 (dielectric constant) とよびます。また，

$$\epsilon/\epsilon_0 = (1+\chi), \tag{3.2.16}$$

を，比誘電率という。誘電率や比誘電率は絶縁体がどれだけ分極するかによってその値が異なる。例えば，比誘電率はゴムで 2.4, NaCl で 5.9, ガラスで 7.5 などの値をもちます。

3.3　電束密度

絶縁体（誘電体）を電極間において電場 $\vec{E}$ をかけると，誘電体の内部は $\vec{P} = \epsilon_0\chi\vec{E}$ だけ分極することがわかった。この分極ベクトルと電場ベクトルを足し合わせると

$$\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0\vec{E} + \epsilon_0\chi\vec{E} = \epsilon_0(1+\chi)\vec{E} = \epsilon\vec{E}, \tag{3.3.1}$$

となります。このベクトル $\vec{D}$ を電束密度とよびます。電束密度はベクトル量であり，これにたいしても 3 章で説明したガウスの法則

$$\int_S \vec{D}\cdot\vec{n}dS = \text{閉局面 S の内側にある電荷の総和} \tag{3.3.2}$$

が成り立ちます。電束密度 $\vec{D}$ は電場 $\vec{E}$ に定数 ϵ(誘電率）を掛けたものです。

3.4　コンデンサーの接続

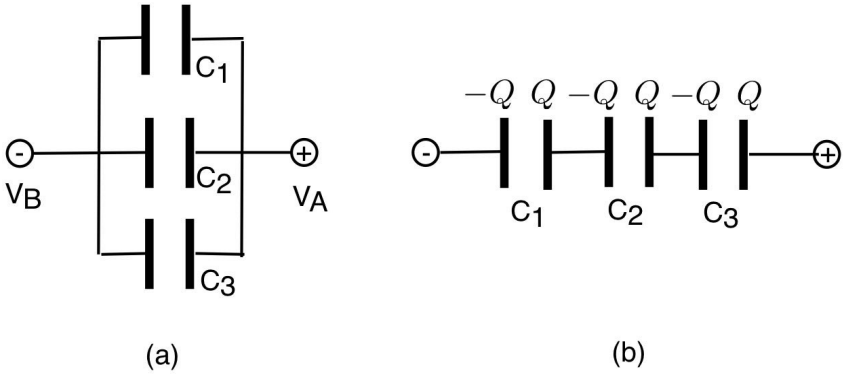

図 3.8　コンデンサーの並列接続 (a) 直列接続 (b) のときの合成容量

コンデンサー（キャパシターともよぶ）を組み合わせることでいろいろな電気回路が作ることができます。図 3.8(a) は容量が C_1, C_2, C_3 の 3 つのコンデンサーを並列につないだ例です。両端に電位差 $V(= V_A - V_B > 0)$ を与えると，各コンデンサーの電位差も同じになります。つまり，各コンデンサーの電気容量は

$$Q_1 = C_1 V, \;\; Q_2 = C_2 V, \;\; Q_3 = C_3 V, \tag{3.4.1}$$

で与えられます。全体を 1 つのコンデンサーと考えると，極板の両端には

$$\pm Q = \pm(Q_1 + Q_2 + Q_3) = \pm \sum_i Q_i, \tag{3.4.2}$$

の電荷が蓄えられることになります。電位差は V なので，その電気容量（合成容量）を C とすると，$Q = CV$ の関係式から，合成容量は

$$C = \frac{Q}{V} = C_1 + C_2 + C_3 = \sum_i C_i, \tag{3.4.3}$$

で与えられます。つまり，コンデンサーを並列に接続すると，合成容量は各コンデンサーの容量の和になるのです。

図 3.8(b) は容量が C_1, C_2, C_3 の 3 つのコンデンサーを直列につないだ例です。この両端に電位差 V を与えると，各コンデンサーの極板に現れる電荷は $\pm Q$ で同じになります。したがって，

$$Q = C_1 V_1 = C_2 V_2 = C_3 V_3, \tag{3.4.4}$$

が成り立ちます。両端の電位差は

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = Q\Big(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\Big), \tag{3.4.5}$$

となります。全体を 1 つのコンデンサーとみなすと，全容量 C は $Q = CV$ の関係式から，

$$C = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)^{-1} = \left(\sum_i \frac{1}{C_i}\right)^{-1}, \tag{3.4.6}$$

が得られます。

「並列接続の場合は，各コンデンサーの電位差が同じになる」と「直列接続の場合は，各コンデンサーの電荷が同じになる」を知っていれば，何も恐れることはありません。

3.5　電気二重層

多くの粒子の表面は電荷も持っています。タンパク質や，高分子，DNA などの粒子はプラスかマイナスの電荷を帯びています。このような粒子（コロイド粒子）が溶液中にあると，コロイド粒子間にはクーロン力が働きます。しかし，電解質溶液などでは，溶液中にもイオンが存在します。例えば，塩を水に溶かした食塩水では，

$$\mathrm{NaCl} + \mathrm{H_2O} = \mathrm{NaOH}^+ + \mathrm{HCl}^-$$

のように，正・負のイオンに解離します。このような電解質溶液にコロイド粒子をまぜると，コロイド粒子間のクーロン力は溶液中のイオンによって遮蔽（しゃへい）されます。では，どのような相互作用に変化するのでしょうか？ここでは，図のように正の電荷に帯電したコロイド粒子の，コロイド表面からの距離 x の関数として静電ポテンシャル $V(x)$（電位と同じ意味）を求めましょう。

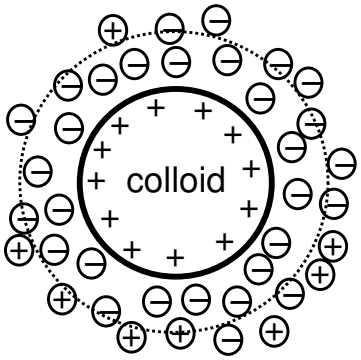

図 3.9　表面にプラスの電荷を持つコロイド粒子のまわりの電気二重層

イオンの分布によってできる電荷密度を (ρ) とすると，ガウスの法則

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon, \tag{3.5.1}$$

が成り立ちます。電位 $V(x)$ と電場 E は式 (3.1.5)

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V(x), \tag{3.5.2}$$

の関係があるので，代入すると，

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = -\rho/\epsilon, \tag{3.5.3}$$

となります。

熱平衡状態におけるイオンの密度 $n(x)$ は，ボルツマンの法則によって，

$$n(x) = n_0 \exp[-U(x)/k_BT], \tag{3.5.4}$$

を満たすように決まります。ここで，$U(x)$ は位置エネルギー，n_0 はバルク溶液におけるイオン濃度です。イオンは正または負の電荷 ($\pm ze$) を持つとして (z は価数)，コロイド粒子の表面から距離 x にある正電荷は $zeV(x)$ の位置エネルギーを持ちます。したがって，正のイオンの数密度は

$$n_+(x) = n_0 \exp\big[-\frac{zeV(x)}{k_BT}\big], \tag{3.5.5}$$

で与えられます。同様に，負イオンの数密度は

$$n_-(x) = n_0 \exp\big[\frac{zeV(x)}{k_BT}\big], \tag{3.5.6}$$

で与えられます。したがって，電荷密度の総和は

$$\begin{aligned}\rho(x) &= ze(n_+(x) - n_-(x)),\\ &= zen_0\big(\exp\big[-\frac{zeV(x)}{k_BT}\big] - \exp\big[\frac{zeV(x)}{k_BT}\big]\big),\end{aligned} \tag{3.5.7}$$

となります。式 (3.5.3) に代入すると, $V(x)$ についての微分方程式

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = zen_0\big(\exp\big[-\frac{zeV(x)}{k_BT}\big] - \exp\big[\frac{zeV(x)}{k_BT}\big]\big), \tag{3.5.8}$$

が得られます。これを，静電ポテンシャルについてのポアソン・ボルツマン (Poisson-Boltzmann) 方程式とよびます。

ここで，電位は小さい，あるいは，温度が十分高温として指数関数をテーラー展開します。つまり，$zeV(x)/k_BT \ll 1$ のとき，

$$\exp\big[\pm\frac{zeV(x)}{k_BT}\big] \simeq 1 \pm \frac{zeV(x)}{k_BT} \tag{3.5.9}$$

で近似して，式 (3.5.7) に代入すると，

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = \frac{2n_0(ze)^2}{\epsilon k_BT}V(x), \tag{3.5.10}$$

となります。これを，デバイ・ヒュッケル (Debye-Huckel) 近似とよびます。

この非線形 2 階の微分方程式の一般解は，

$$V(x) = a\exp(x/D) + b\exp(-x/D), \tag{3.5.11}$$

となります。ここで，定数 D は

$$D = \sqrt{\frac{\epsilon k_BT}{2n_0(ze)^2}}, \tag{3.5.12}$$

で，a, b は 2 つの境界条件で決まります。まず，一つ目の境界条件は, $x=\infty$ で $V(\infty)=0$ なので，$a=0$ でなければならない。もう一つは，コロイド粒子の表面電荷を σ とすると，表面での電場は

$$E(x=0)=\sigma/\epsilon \tag{3.5.13}$$

となります。式 (3.5.2) と (3.5.11) から，

$$E(x)=-\nabla V(x)=-\frac{b}{D}\exp[-x/D], \tag{3.5.14}$$

なので，$x=0$ を代入すると

$$E(x=0)=-\frac{b}{D}=\frac{\sigma}{\epsilon_0}, \tag{3.5.15}$$

が成り立ちます。したがって，定数 b は

$$b=-\frac{\sigma}{\epsilon}D, \tag{3.5.16}$$

となり，式 (3.5.10) の解は

$$V(x)=\frac{\sigma}{\epsilon}D\exp\Big(-\frac{x}{D}\Big), \tag{3.5.17}$$

となります。これが，電解質溶液内でのコロイド粒子に働く静電ポテンシャルです。コロイド粒子表面から距離が D 離れると，ポテンシャルが $1/e$ 倍減少します。この D(式 (3.5.12)) のことをデバイ長 (Debye length) とよび，電解質溶液内にあるコロイド粒子を取り巻くイオン層の厚さを意味します。このようなコロイド粒子のまわりのイオン層のことを電気二重層 (Electro static double layer) とよびます。図 3.9 の点線の円がデバイ長の長さ程度です。コロイド粒子表面にあった正の電荷は溶液内の負の電荷によって相互作用が遮蔽されて弱くなります。デバイ長が小さいほど，コロイド粒子のまわりのイオン層の厚みがうすいので，コロイド粒子が他のコロイド粒子とぶつかるチャンスが増えます。そうすると，コロイド粒子同士が凝集して溶液から析出します。コロイド粒子やタンパク質の水溶液に十分な塩を入れると析出します。これをコロイド粒子の塩析とよびます。

3.6　補足

3.6.1　力とポテンシャル

一般に力 $\vec{F}$ は相互作用ポテンシャル $V(r)$ とは，

$$\vec{F}=-\vec{\nabla}V(r)$$

の関係にあります。電位は静電ポテンシャルともよばれます。式 (3.1.7) に両辺に電荷 q を掛ければクーロン力になります。

3.6.2　単位

- 電気容量の単位：1 F(ファラッド)=1 [C/V].

3.6.3　原子の分極

図 3.10 の左は水素原子の古典的描像です。原子核（正電荷）のまわりを電子（負電荷）が矢印の方向に回っています。この状態で下から上の方向へ電場 $\vec{E}$ をかけると（コンデンサーの中に置いたと考えればよい），右の図に示したように，電場が正電荷と負電荷に対してクーロン力 ($\vec{F} = q\vec{E}$) をおよぼします。その結果，正電荷は上に，負電荷は下に移動します。正電荷と負電荷の間にはクーロン引力が働いているので，電場と釣り合ったところで平衡位置に達します。これが分極です。コンデンサー内の絶縁体内部もこのように正電荷と負電荷のわずかな移動が分極を引き起こします。

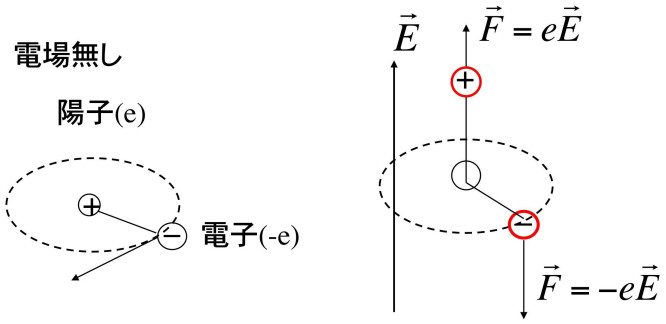

図 3.10　分極のメカニズム

3.7　演習問題

1. 半径が a の球面上に一様に電荷密度 $\rho_s[C/m^2]$ で電荷が分布しているとき、電場と電位を球の中心からの距離を r の関数としてを求めましょう。得られた結果を図示してください。
2. 原点にある電荷 q が置かれているとき，原点から距離 r にある点 P における電位は
$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}, \tag{3.7.1}$$
です。$\vec{E} = -\vec{\nabla}V(r)$ を計算して電場を求めましょう。
3. 半径 a の電荷 Q がもつ導体球の電気容量 C を求めましょう。さらに，$a = 0.1m$ のときの C の値を計算してください。
4. 誘電分極と分極の現象を説明してください。
5. ２枚の極坂間に絶縁体を挟むとコンデンサーの容量はどうなるでしょうか？
6. 図 3.11 のように容量 C_1 と C_2 のコンデンサーをつないだ。
   (a) 全容量を求めよ。
   (b) 両端に電位差 V を与えたとにに，各コンデンサーにかかる電位差はいくらか？
7. 25 ℃におけるデバイ長は塩化ナトリウム水溶液で，$D = 0.304/\sqrt{n_0}$ [nm] となることを確かめましょう。ただし，n_0 は塩のモル濃度 [mol dm^{-3}]，水の誘電率は $\epsilon = 78.5\epsilon_0$ で計算

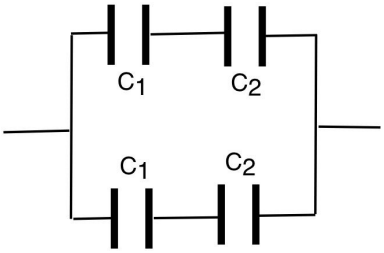

図 3.11　コンデンサーの接続

してください。

第 4 章

電流とオームの法則

ここでは，電流について学びましょう　(2.5 章も参考に)。まずは，現象を理解して，その後でその現象を数式で理解しましょう。

4.1　電流

1 秒間 [S] で 1 クーロン [C] の電荷が流れるとき，電流の強さは 1 アンペア—[A] であると定義します。1 アンペア—で約 10^{18} 個の電荷が 1 秒間で流れます。コンセントの電源を ON にすると電気がつきますが，これは電荷を消費して明かりをつけているのです。電源コードの中には金属（例えば銅など）でできた導線が入っています。電源コードを覆っているビニールを破ってみれば導線が出てきます。この導線（導体）には自由に動ける電荷が多数存在します。この電荷の流れが電流です。ただし電流はベクトル量です。つまり流れる方向があります。プラスの電荷（陽子）の流れる方向を電流の正方向に定義してあります。マイナスの電荷（電子）の流れる方向は電流の向きとは逆方向です。

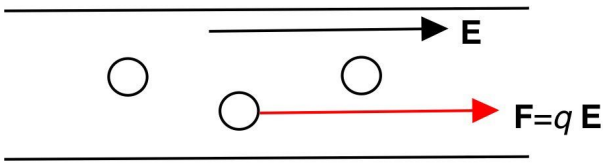

図 4.1　導線内の電荷。＋電荷に働くクーロン力（赤の矢印）

ではなぜ電荷（電流）が流れるのでしょうか？図 4.1 は導線内の電荷を示したものです。導線を作っている金属は自由に動く電荷を持っています。もちろん目には見えません。図はわかりやすくするために電荷を大きな○印で書いてあります。この導線の右と左で電位差を与えてやります。例えば左を＋極，右を－極として電位差を与えます。これは，導線の両端に電池を繋げるだけで作れます。例えば単 3 電池を繋げれば 1.5[V] の電位差を作ることが出来ます。そうすると電場 $\vec{E}$ が導線内に発生します。電場の方向は＋からわき出す方向を正に定義してあるので，矢印の方向に電場が発生します。

このような電場 ($\vec{E}$) の中に電荷 (q) が存在すると，クーロン力

$$\vec{F} = q\vec{E}, \tag{4.1.1}$$

が働きます。そうするとこのクーロン力によって導線内の電荷が引かれて矢印（赤）の方向に電荷が流れることになります。これが電流です。電流を流すには電位差が必要だと言うことです。

図 4.1 の状況は例えば，血液中のタンパク質や DNA の流れ，と考えることも出来ます。通常タンパク質やＤＮＡも電荷を持っています。体内にわずかな電位差が作られるとクーロン力によってタンパク質が流れます。電場の強い環境下にいると血流などが変わります。

さてこの電流 (I) ですが，電位差 (V) と

$$V = IR \tag{4.1.2}$$

の関係があります。ここで，R は電気抵抗と呼びます。電気抵抗の単位はオーム [Ohm=V/A] です。つまり，電流と電位差は比例します。この関係式をオームの法則と呼びます。電荷が流れると他の粒子との衝突や摩擦が起こります。これが電気抵抗になっています。

しばらく電流を流していると導線がだんだん暖かくなってきますね。これはこの電荷の摩擦によって発生する摩擦熱です，これをジュール熱と呼びます。たくさんの電荷が導線を構成する粒子などと衝突する結果，熱が発生するのです。なんだかすごいことですね。目に見えない小さい粒子がこんなにも暖かい熱を放出するとは，なんか，不思議なことだと思いませんか？摩擦は原子レベルで起こっているのです。

このジュール熱は，

$$W = VI = RI^2 \tag{4.1.3}$$

で与えられます。これは皆さんがよく知っている電力と呼ばれているもので，ワットという単位を持ちます [W=J/S]。毎月，九州電力から請求される電気代とは，この電力 (W) に時間を掛けた熱のことです。電力とはジュール熱で消費された電気量と考えてもいいでしょう。最近の電化製品は省電力とはいいますが，消費電力はゼロではないですね。ゼロにするにはどうすればいいのでしょう？電荷が動くときに摩擦を完全になくすことが出来れば，消費電力ゼロの家電製品が出来ます。これはすごいことですね，二酸化炭素削減にすごく貢献できますね。世の中には電気抵抗ゼロの物質もあります。超伝導体と呼ばれる物質ですが，しかしまだ実用化にはほど遠いようです。

4.1.1　ブレーカーが落ちるとは？

電力会社との契約にもよりますが，標準的なワンルームマンションでは，$I =$ ３０アンペアーぐらいまでは電力を使うことが出来ると思います。つまり，１秒間に３０アンペアーまで使えるということです。一秒間に３０クーロンの電荷を使えるともいえる。日本国内の電圧は $V =$ １００ボルトですから，全部で $W =$ ３０００ワット使えます。海外では２００Ｖのところが多いのです。暖房にオイルヒーター（最強で１０００ワット）使って，洗たく機を使いながら（これが約１０００ワット），電気鍋ですき焼きをすると，消費電力が３０００ワットを超えます。電力会社との契

約電力３０００ワット (3KW) を越えるとブレーカーが落ちるようになっています。頻繁に起こる場合は，省エネに努めましょう。あるいは，もっと大きい容量に契約変更するのもいいですね。

本格的な冬が来る前に，各自の電力量をチェック！

4.2　オームの法則

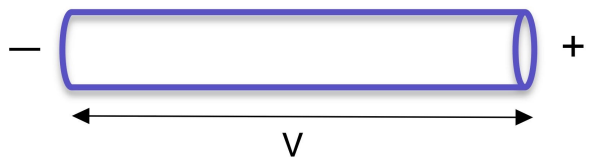

図 4.2　長さが l，断面積が S の一様な太さの針金 (導線）の両端に一定の電位差 V を与える

針金（導線）の両端に一定の電位差 V を与え続けると，針金に一定の電流 I が流れます。実験によると，電流は電位差は比例します：

$$I = \frac{V}{R}, \tag{4.2.1}$$

ここで，R は針金の電気抵抗です（式 (4.1.2) を参照)。この関係式をオームの法則とよびます。図 (4.1) に示したように，電場が常に保たれれば，電流が常に流れることになります。電場が時間的に変化しなければ，電流も時間的に変化しない定常電流になります。$V = IR$ の意味は，抵抗が R の導線に電流 I が流れているとき，その両端には $V = IR$ の電位差が生じていると理解することができます。これは，以下に出てくる電気回路の理解の基礎となります。しっかり理解しましょう。電流の単位はアンペアー (A)，電位差はボルト (V)，抵抗の単位はオームとよび，Ω で表します。

図 4.2 の針金を n 本束ねた太い針金を考えましょう。そこに同じ電位差 V を与えれば，電流は nI になるので，$V = nIR$ となります。この場合，針金の抵抗 R は n に反比例します。つまり，針金が太いほど，電気抵抗は小さくなります。

次に，同じ針金を，n 本直線上につないだ長い針金の場合を考えてみましょう。１本の針金の電位差は V なので，n 本全体の電位差は nV になります。したがって，$nV = IR$ となり，針金の抵抗は n に比例することになります。つまり，針金が長いほど，電気抵抗は大きくなります。

長さが l，断面積が S の一様な太さの導線の電気抵抗は一般に，

$$R = \rho \frac{l}{S}, \tag{4.2.2}$$

で与えられます。ここで，ρ は物質によってきまる定数で，比抵抗あるいは低効率とよびます。単位は $\Omega \cdot m$ です。ρ の逆数 $\sigma = 1/\rho$ をその物質の電気伝導度といいます。σ の値が大きいほど，抵抗が小さく電流をよく流す物質です。例えば，$20C^\circ$ で，鉄の低効率は $\rho = 1.0 \times 10^{-7}(\Omega \cdot m)$，銅の低効率は $\rho = 1.7 \times 10^{-8}(\Omega \cdot m)$，アルミニウムの低効率は $\rho = 2.8 \times 10^{-8}(\Omega \cdot m)$ です。その他，さまざまな物質の低効率が測定されています。ネットや理科年表などで調べましょう。

式 (4.2.2) を式 (4.2.1) に代入すると，

$$\frac{I}{S} = \frac{1}{\rho}\frac{V}{l}, \tag{4.2.3}$$

となります。左辺 (I/S) は，電流密度（単位体積当たりの電流）でこれを i と書くことにします。右辺の V/l は，電位差によって生じる針金の中の電場 (E) です。したがって，電気伝導率 σ を用いると，$i = \sigma E$ と表すことができます。電流や電場はベクトル量なので，ベクトル表示で書くと，

$$\vec{i} = \sigma \vec{E}, \tag{4.2.4}$$

となります。これを，一般化されたオームの法則とよびます。

4.2.1　ジュール熱と起電力

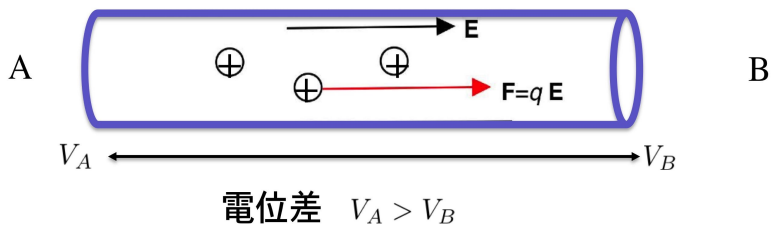

図 4.3　電気抵抗の原因は，電荷を持った粒子の衝突

この章の初めにもお話ししたように，導線を構成する物質で電荷を運ぶイオンや伝導電子などは完全に自由に動けるわけではなく，導線を構成する粒子と絶えず衝突を繰り返して動いていく。これが電気抵抗の原因となり，摩擦により温度が上昇する。これが，ジュール熱です。図 4.3 に示すように，A 点と B 点の電位が V_A, V_B で，$V_A > V_B$ のとき，電場 $(\vec{E})$ は A から B の方向をもち，荷電粒子を動かします。このとき，電場が電荷 (q) にする仕事は $q(V_A - V_B)$ となります。しかしながら，この仕事の一部はジュール熱として消えていく。

抵抗が R の針金の両端に電位差 V がかけられているとき，単位時間あたり

$$W = VI = I^2 R = \frac{V^2}{R}, \tag{4.2.5}$$

のエネルギーがジュール熱となります。電場のエネルギーがジュール熱で使われれると，電場はどんどんと弱くなっていきますが，電池などの電源は，化学エネルギーなどを利用して電場がなくならなうように供給し続けます。電場がこのように電流を流し続けることを起電力といい，その大きさは電位差を用いています。

図 4.4 は，電池に抵抗 R をつないで電流を流す場合の回路図をしめします。電池は通常，細い線（＋極）と太い短い線（マイナス極）で示します。抵抗は，ギザギザ線で描いたりもしますが，このテキストでは，長方形で書くことにします。中にある R などの記号は抵抗の大きさを示すこと

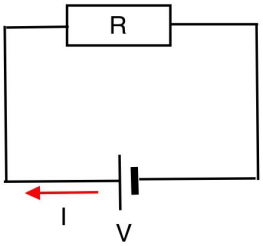

図 4.4　電気回路

にします。電流は＋極からマイナス極の方向（矢印の方向）に流れます。電池の内部抵抗を r とすると，電池をつなげて電流を流すと

$$I = \frac{V}{R+r}, \tag{4.2.6}$$

となることが知られています。通常（このテキストでは），内部抵抗はゼロとします。もちろん，抵抗と電池をつないでいる導線の抵抗もゼロとします。R は合成抵抗だと考えればよい。

4.3　キルヒホッフの法則

電池のような電源や抵抗がいろいろ組み合わされた電気回路網において，どのように電流が流れるかを知りたい場合，キルヒホッフの法則を利用すると便利なのです。

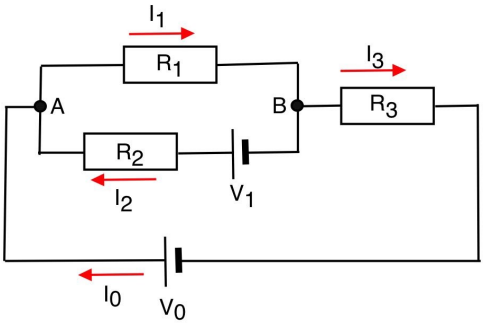

図 4.5　電気回路の一例

図 4.5 のような電気回路を考えましょう。電源が V_0 と V_1 の二箇所にあります。まず，回路の各部分を流れる電流を，適当に向きまで決めて I_0, I_1, I_2,I_3, $\cdots$ と置きます。矢印の方向を各電流が流れる方向としています。枝分かれのない一本の導線には一定の電流が流れています。

第 1 法則（電流則）：

「分岐点に流れ込む電流の総和と流れ出る電流の総和は等しい」のです。例えば，分岐点 A では，$I_1 = I_0 + I_2$，分岐点 B では，$I_1 = I_2 + I_3$ となります。これは，電流は電荷粒子の流れであることを思い出してください。10 個の電荷と 90 個の電荷が分岐点に流れこむと，100 個の電荷が分岐

点から出ていくことになります。任意の各分岐点で

$$\sum_{i=0}^{n} I_i = 0, \tag{4.3.1}$$

が成り立つことがわかります。ここで，n は分岐数です。

第 2 法則（電圧則）：

「任意の閉回路を一回りするとき，そこに含まれる起電力の総和は，そこに含まれる抵抗と電流の積の和に等しい」のです。ただし，回る向きと同じなら正，反対向きなら負とします。この例の場合，回る向きは右回りが正としています。例えば，$V_0 \to R_2 \to R_3 \to V_0$ の閉回路を考えると，そのなかに含まれる起電力は V_0 と V_1 になります。しかし，V_1 は右回りと逆方向に電流を流そうとしているので，負号をつける必要があります。電流では，I_2 が逆向きになっているので負号をつける必要があります。こうして，

$$V_0 - V_1 = -I_2 R_2 + I_3 R_3, \tag{4.3.2}$$

という関係式が得られます。同様にして，$V_0 \to R_1 \to R_3 \to V_0$ の閉回路についても，電圧則を考えてみましょう。さらに，$A \to R_1 \to B \to V_1 \to R_2 \to A$ の閉回路についても，電圧則が書けますよね。

任意の閉回路で，

$$\sum_{k=0}^{n} V_k = \sum_{i,j} R_i I_j, \tag{4.3.3}$$

と書くことができます。

このように，キルヒホッフの第 1，第 2 法則を書き下して連立方程式を解いていくことで，各回路での電流の大きさを計算することができるようになります。

4.3.1　抵抗の直列接続

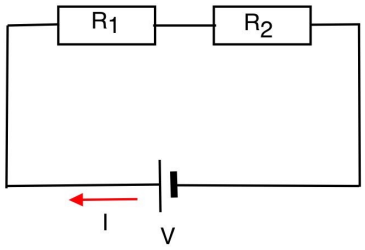

図 4.6　直列接続

図 4.6 のように 2 つの抵抗 R_1, R_2 を直列につないだ場合，流れる電流は共通（一定）なので，それを I とすると，キルヒホッフの第 2 法則から，

$$V = I(R_1 + R_2), \tag{4.3.4}$$

となります。これは，起電力が V の電池に合成抵抗（全抵抗）が $R = R_1 + R_2$ の抵抗をつないだときと同じになります。3 つ以上を直列につないだ場合も同様で，直列の場合の合成抵抗は

$$R = \sum_i R_i, \tag{4.3.5}$$

となります。

4.3.2　抵抗の並列接続

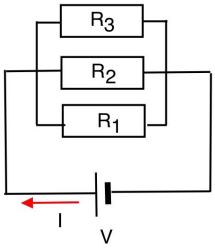

図 4.7　並列接続

図 4.6 のように 3 つの抵抗 R_1, R_2, R_3 を並列につないだ場合，電流 I は分岐点で分かれます。各抵抗に流れる電流を，I_1, I_2, I_3 とすると，キルヒホッフの第 1 法則より，

$$I = I_1 + I_2 + I_3, \tag{4.3.6}$$

が成り立ちます。また，キルヒホッフの第 2 法則から，3 つの閉回路 ($V \to R_1 \to V$, など) について起電力を求めると，

$$V = I_1 R_1, V = I_2 R_3, V = I_3 R_3, \tag{4.3.7}$$

が成り立ちます。式 (4.3.7) を用いて，式 (4.3.6) を計算すると，

$$I = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2}\right)V, \tag{4.3.8}$$

が得られます。したがって，

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2}, \tag{4.3.9}$$

とおけば，$I = V/R$ となり，合成抵抗は

$$R = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2}\right)^{-1}, \tag{4.3.10}$$

となります。

式 (4.3.5) や式 (4.3.10) は，ある意味合成抵抗の公式なのですが，いちいち覚える必要はないでしょう。どのような電気回路であろうと，キルヒホッフの法則さえ適用すれば，自然に導出されます。慌てず，ゆっくりキルヒホッフの法則を考えながら回路を読むことです。

4.4　演習問題

1. 直径 1mm の円形断面をもった導線（鉄）1m 当たりの抵抗は何オームになるか，計算しましょう。
2. 図 4.8 のような回路の合成抵抗を R_0 にするには，R_1 をどのような値にすればよいか？（ヒント：キルヒホッフの法則を書き下すと自然に求められるはず・・・）

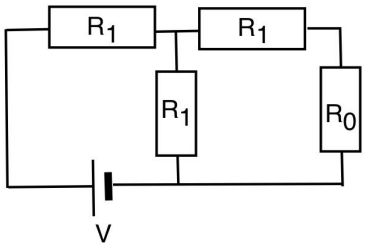

図 4.8　合成抵抗

3. 図 4.9 のような回路がある。(a) 全抵抗（合成抵抗）と，電流 I_2 を求めましょう。(b) V=5 ボルト，$R_1 = R_2 = R_3 = 3$ オームのときの，全抵抗と I_1, I_2, I_3 を求めましょう。

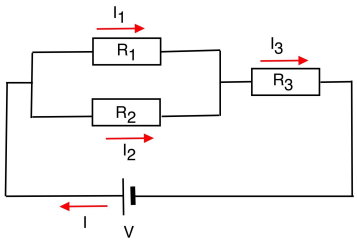

図 4.9　合成抵抗

第 5 章

電流と磁場

この章では，磁石について学びましょう。電荷のまわりの電場と同じように，磁荷のまわりには磁場が発生します。

5.1　磁場に対するクーロンの法則

磁石はN極とＳ極を持っています。N極とＳ極の間には引力が働きますが，同じ極同士は斥力になります。電気の正電荷と負電荷と同じです。では電気と磁気の違いは何でしょうか？

5.1.1　磁荷

電気の場合は正電荷と負電荷を分けることが出来ます。正電荷だけを取り出すとか，負電荷だけを集めるとか，容易に出来るわけです。ところが，磁気の場合，N極とＳ極に分離できないのです。N極とＳ極のことを磁荷とよびます。磁石は分割していっても，N極とＳ極の磁荷に分離できない。必ずN極とＳ極のペアで現れます。

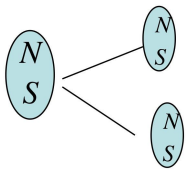

図 5.1　磁石は分割していっても，N極とＳ極の磁荷に分離できない。

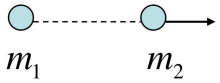

図 5.2　磁荷に対するクーロンの法則

このようなN極とＳ極の磁荷の間にも電荷と同じクーロン力が働いているのです。実際には単独

の磁荷は存在しませんが，存在すると仮定して考えることにしましょう（磁荷にはN極とＳ極があると考えてください)。こう考えることでいろいろな現象がうまく説明できるのです。図 5.2 に示したように，磁荷 m_1 と m_2 をもつ 2 つの磁荷が距離 r 離れているときの，２つの磁荷 (極）の間に働く力は，磁荷に対するクーロンの法則

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{e}_{12}, \tag{5.1.1}$$

であたえられます。ここで，$\vec{e}_{12} = \vec{r}/r$ は 1 から 2 への向きの単位ベクトルです。また，μ_0 は真空の透磁率であり

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}[NA^{-2}], \tag{5.1.2}$$

です。磁荷の単位はウエーバー (Wb) で，1[Wb]=1[J/A] の単位系をもちます。実際には，N極とＳ極に分割は出来ないが，N極とＳ極の間には引力が働いているとし，同じ極同士間には斥力が働くので，電荷と同じように考えることができるわけです。

5.1.2　磁場

このようなN極やＳ極の磁荷のまわりには，2 章で勉強した電荷と電場の関係と同じように，磁荷のまわりには磁場が発生しています。磁荷 m_1 のつくる磁場の大きさは，

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{m_1}{r^2}\vec{e}_{12}, \tag{5.1.3}$$

であたえられます。磁場の単位は

$$N/Wb = NA/J = A/m, \tag{5.1.4}$$

などです。よく磁石の単位としてテスラー(T) やガウス (gauss) が使われますが，これらは，

$$1[Wb/m^2] = 1[T] = 10^4[gauss]$$

として定義されています。磁束密度の単位として使われています。

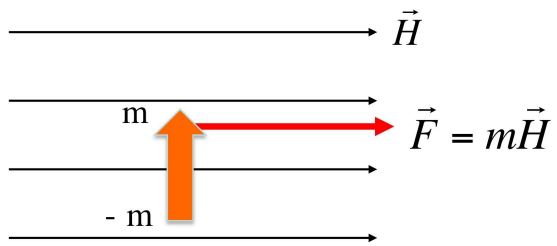

図 5.3　方位磁石は地球の磁場で引っ張られて北を指し示す。磁石には $+m$ と $-m$ の一組の磁化が必ず存在する。

方位磁石を使って北はどちらか調べたことがあると思います。この場合，方位磁石のN極が示す方向が地球の北極を示すことになっています。つまり北極はＳ極に対応しているのです。N極とＳ

極はクーロン力で引きつけあうため，磁石のＮ極は北極のＳ極に引かれて北を指し示すわけです。反対の南極はＮ極です。このように，地球の磁場（磁力線）は南極のＮ極から北極のＳ極に向かってでていることが解ります。磁力線はＮ極からＳ極へ向かうのです。もちろん磁場 $\vec{H}$ 中で磁荷 m をもつ粒子には，

$$\vec{F} = m\vec{H} \tag{5.1.5}$$

のクーロン力が働いているわけです。方位磁石は地球の磁場で引っ張られて北を指し示すように回転するのです。

5.2　磁性体

４章では電場による誘電分極を学びました。この章では電場のかわりに，磁場がテーマです。物質はすべて磁場中で磁化します。磁化した物質を磁性体とよびます。

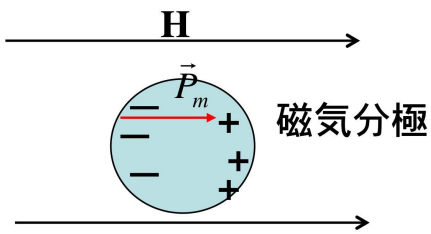

図 5.4　磁気分極

誘電体の電場による誘電分極にたいして，磁場中におかれた物質では，正負等量の磁荷が出現します。物質をどのように分割しても必ず表面にＮ極とＳ極が生じます。このように磁場によって物質が磁化される現象を，磁気分極といいます。図 5.4 は磁気分極の様子を示しています。物質中の磁化であるＮ極（プラスの印）やＳ極（マイナスの印）がまわりの磁場からクーロン力を受けて移動します。磁気分極 $\vec{P}_m$ の大きさは

$$\vec{P}_m = \mu_0 \chi_m \vec{H} \tag{5.2.1}$$

であたえられます。ここで，χ_m は磁化率でとよびます。$\chi_m > 0$ の物質を常磁性体，$\chi_m < 0$ の物質を反磁性体とよびます。物質に働く磁場 $\vec{H}$ と磁気分極をあわせて，

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{P}_m, \tag{5.2.2}$$

を磁束密度とよびます。磁束密度のことを，磁場とよんだりする場合もあります。式 (5.2.1) を代入すると，

$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu \vec{H}, \tag{5.2.3}$$

となり，μ を透磁率とよびます。比 μ/μ_0 を比透磁率とよび，殆どの物質では 1 程度であるが，鉄などの強磁性体では数千と非常に大きい値をもちます。

5.2.1　磁場のわきだし？

図 5.4 で示した物質に作用する磁場 $\vec{H}$ はどこから来るのであろうか？”電場であれば左の方に正電荷がありそこから電場がわき出している”と考えればよいわけですが，磁場の場合も同じように考えることができるでしょうか？つまり”左の方にN極が存在していてそのN極から磁場がわき出している”と考えて正しいでしょうか？もしそうだとすると $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=\rho$ のような式が成り立つと考えることはできるでしょうか？

答えは，上の考え方には一カ所間違いがあります。この章の最初に説明したように磁石の場合，N極とS極には分割できないという現実があります。つまり磁束密度や磁場には沸きだしや，吸い込み口は存在しないとういことです。沸きだしや，吸い込み口がなくて，磁場 $\vec{H}$ を描くにはどうすればいいでしょう。唯一の解は磁場を循環させることです。つまり矢印の先と根本を結ぶ。これが磁場の本質なのです。これを数学的に書くと

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0, \tag{5.2.4}$$

となります。磁場の発散は必ずゼロになる。沸きだしや吸い込み口は存在しない。したがって，磁石の中の磁場は図 5.5 のように循環しているのです。図 5.4 の磁場は，左から右に向かって，さらにぐるーっとまわって同じところに戻ってきているのです（この様子を図中に書き入れてみましょう）。電場の場合との違いをしっかりと理解してください。式 (5.2.4) は電磁気学を構成する 4 つのマクスウェル方程式の 1 つです。授業ではこれで合計 2 つのマクスウェル方程式がでてきました。

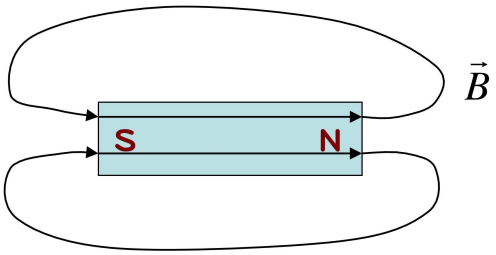

図 5.5　磁場は循環する

5.3　アンペールの法則

磁場によって方位磁石が回転することは前節で説明しました。同じことが電流を流しても起こります。方位磁石のそばで電流を流すと回転するのです。図 5.6 のように上向きに電流 $\vec{I}$ が流れている導線に磁石を近づけていくと磁石は右方向に引っ張られます。これは，電流の進む向きをもつ右ねじの方向に循環する磁場 $\vec{B}$（または，$\vec{H}$）が作られているからです。この磁場のクーロン力で磁極（NまたはS）が力を受けて磁石が回転するわけです。

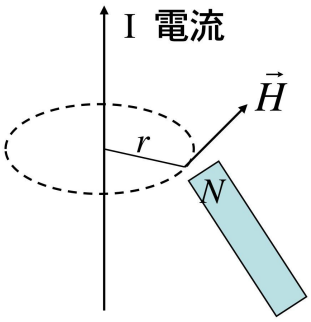

図 5.6　電流は磁場をつくりだす

磁場の接線方向の成分を円周上で積分（閉曲線 C に沿って線積分）すると，

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \tag{5.3.1}$$

がなりたちます。ここで I は電流の大きさです。磁場を右ねじの方向に回したとき，進む方向が電流の正の方向と定義しています。磁場と電流は密接に関係しています。この式をアンペールの法則とよびます。

半径 r の閉曲線に沿って一周積分すると

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = H 2\pi r = I \tag{5.3.2}$$

となり，直線電流から距離 r 離れたところでの磁場は

$$H = \frac{I}{2\pi r}, \tag{5.3.3}$$

であたえられます。

式 (5.3.2) の線積分はストークスの定理によって面積積分に変換することが出来ます[*1]：

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S}, \tag{5.3.4}$$

ここで，C は曲面 S の周囲の閉曲線です。電流の面密度を $\vec{j}$ とすると，電流 $\vec{I}$ は

$$\vec{I} = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}, \tag{5.3.5}$$

となるので，式 (5.3.4) と式 (5.3.5) をつかって，アンペールの法則は

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}, \tag{5.3.6}$$

と書き換えることが出来るます。したがって，アンペールの法則の微分形は

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}, \tag{5.3.7}$$

[*1] 証明は図書館の本で調べましょう。

となります。磁束密度（5.2.3) を用いて書くと

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \vec{j}, \tag{5.3.8}$$

です。電流が流れるとそのまわりに磁場が出来ます。あるいは，磁場が回転すると電流が流れるという意味をもちます。式 (5.3.7) 又は，式 (5.3.8) は電磁気学を構成する 4 つのマクスウェルの方程式の 1 つです。これまでに 3 つのマクスウェル方程式がでてきました。

一般に式 (5.3.1) は，

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \text{閉曲線 } C \text{ の内側に含まれる電流の総和}, \tag{5.3.9}$$

とかけことがわかりますね。これは，2 章の電場のガウスの法則（式 (2.2.1)）と同じ考え方なのです。積分が面積積分から線積分に変わっただけです。

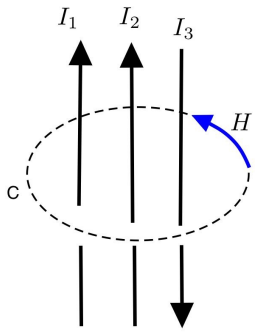

図 5.7　アンペールの法則

以下では，アンペールの法則の適用例を少し紹介しておきましょう。図 5.7 は，3 つの線状の電流が半径 r の閉曲線 C 内に流れている状況です。アンペールの法則を適用すると，

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_1 + I_2 - I_3, \tag{5.3.10}$$

となります。電流が何本もあるときは，閉曲線 C を通り抜けていく電流の代数和を考えればよいのです。ただし，符号付きです。磁場 H を右ネジの方向に回して，ネジが進む方向を電流の正の方向としています。右ネジを巻いて (H を巻く）進む方向が電流の正の方向です。したがって，電流 I_3 は負号がつきます。左辺は，閉曲線 C が円だとすると，

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = 2\pi r H(r), \tag{5.3.11}$$

となります。このテキストでは，円以外の閉曲線は考えませんので，左辺は常に $2\pi r H$ になります。2 章でも同じ考え方でした。したがって，磁場は

$$H(r) = \frac{I_1 + I_2 - I_3}{2\pi r}, \tag{5.3.12}$$

となります。磁束密度は $B(r) = \mu H(r)$ です。このような線状の電流では導線の太さを考えていません。では，導線の太さも考えて同じことを計算してみましょう。

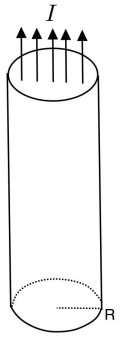

図 5.8　半径 R の導線内を一様に流れる電流 I

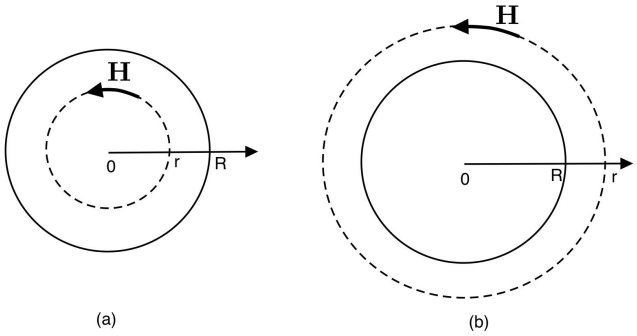

図 5.9　導線を上から見る。アンペールの法則の適用方法

図 5.8 に示すように，半径 R の導線内を一様に矢印の方向に電流 I が流れている場合を考えましょう。この時の磁場の大きさを，導線の中心からの距離 r の関数として計算してみましょう。アンペールの法則（5.3.9）の適用しましょう（2 章 2 節を復習してください。すぐに理解できるはずです)。電流密度を i とすると，全電流 I は

$$I = \pi R^2 i, \tag{5.3.13}$$

で与えられます。半径 r は (a) $0 < r < R$ と (b) $r > R$ の 2 つの場合につおて考える必要があります。図 5.9 は導線を上から見た状態を示します。アンペールの法則は，点線の閉曲線 C にそって磁場を回転させた時，その閉曲線を貫く電流の総和になります。(a) $0 < r < R$ のとき，点線の内側の電流の総和は，電流密度 i を用いて，$\pi r^2 i$ となります。一方，(b) $r > R$ の場合は，点線の閉曲線の内側の電流の総和は I となります。

したがって，

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \begin{cases} \pi r^2 i & (r < R) \\ I & (r > R) \end{cases}$$

となります。左辺は式 (5.3.11) なので，代入して計算すると求める磁場は，

$$H(r) = \begin{cases} \frac{1}{2} i r & (r < R) \\ \frac{I}{2\pi r} & (r > R) \end{cases}$$

で与えられます。導線外の磁場は線状の電流の作る磁場と同じになることがわかりましたか？ $H(r)$ のグラフを書いてみましょう。これは，「球状に分布する電荷がその外部につくる電場は，点電荷のつくる電場と同じになる」ということに対応している。これは，2 章の点電荷が作る電場で勉強しました。忘れた人は，もう一度 2 章へ戻る。

5.3.1　ベクトルポテンシャル

任意のベクトル $\vec{A}$ に対して

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})=0, \tag{5.3.14}$$

が常に成り立つので，式 (5.2.4) の $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$ であることから，

$$\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}, \tag{5.3.15}$$

とおくことができます。この $\vec{A}$ をベクトルポテンシャルとよびます。$\vec{A}+\vec{\nabla}\phi$ も $\vec{A}$ と同じ磁場 $\vec{B}$ を与えます[*2]。したがって，静磁場では，$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$ としている。

$\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$ を式 (5.3.8) に代入すると，$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$ をもちいて，

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})-\vec{\nabla}^2\vec{A}=-\vec{\nabla}^2\vec{A}=\mu\vec{j}, \tag{5.3.16}$$

となります。最初の等号はベクトル公式です。したがってベクトルポテンシャルは

$$\vec{\nabla}^2\vec{A}=\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial z^2}=-\mu\vec{j}, \tag{5.3.17}$$

と表されます。これは，ポアッソン方程式とよばれていて，解は

$$\vec{A}(\vec{r})=\frac{\mu}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(\vec{r}_1)}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}d\vec{r}_1, \tag{5.3.18}$$

で与えられます。

5.3.2　ビオ・サバールの法則

アンペールの法則をもう少し一般化したものに，ビオ・サバールの法則というのがあります。これは，図 5.10 のように強さ I の電流が流れているとき，その上の微少部分 dS から距離 r 離れた点Pに作る磁場は

$$d\vec{H}=\frac{I}{4\pi}\frac{d\vec{S}\times\vec{r}}{r^3}, \tag{5.3.19}$$

で与えられます。ここで，$d\vec{S}$ は電流の接線方向の向きをもつ微少部分の面積，$\vec{r}$ は電流から点 P へのベクトルです。これを使って，式 (5.3.3) を証明することも出来ます。閉曲線の電流が作る磁場は，

$$\vec{H}=\frac{I}{4\pi}\oint_C\frac{d\vec{S}\times\vec{r}}{r^3}, \tag{5.3.20}$$

[*2] 3.3.4 節参照

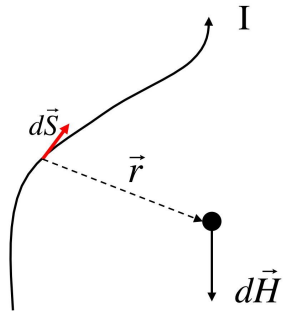

図 5.10　ビオ・サバールの法則

で計算できます。

ビオ・サバールの法則を用いて，強さ I の直線電流から a のところにある点 P の磁場 H を求めてみよう。式 (5.3.3) が導けるはずです。図 5.11(左) の微少部分 dS の部分が点 P につくる磁場は，ビオ・サバールの法則から，

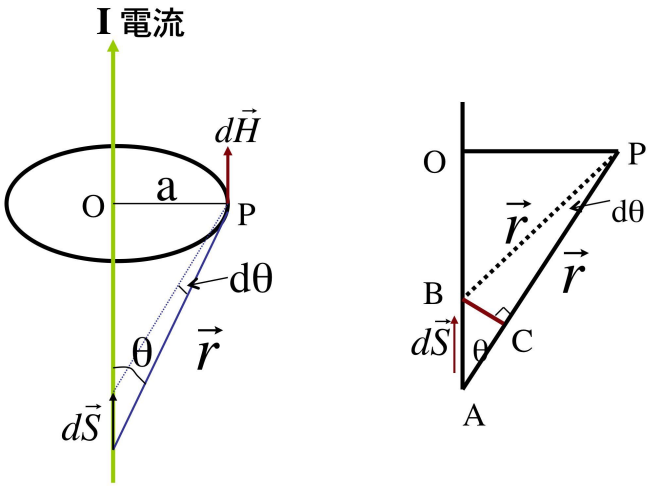

図 5.11　ビオ・サバールの法則

$$d\vec{H} = \frac{I}{4\pi}\frac{d\vec{S}\times\vec{r}}{r^3} = \frac{I}{4\pi}\frac{|d\vec{S}||\vec{r}|\sin\theta}{r^3} = \frac{I}{4\pi}\frac{|d\vec{S}|\sin\theta}{r^2}, \tag{5.3.21}$$

です。ここで，θ を変数とすることを考えましょう。図 5.11(右) のように $d\theta$ が十分小さいとき，$PB = PC = r$ で，

$$BC = r\sin(d\theta) \simeq rd\theta \tag{5.3.22}$$

がなりたちます[*3]。一方 $BC = dS\sin\theta$ なので

$$rd\theta = dS\sin\theta \tag{5.3.23}$$

[*3] 最後の近似は $\sin\theta$ のテーラー展開です

がなりたちます。式 (5.3.22), 式 (5.3.23) を式 (5.3.21) に代入し θ で積分すると，

$$H = \int dH = \frac{I}{4\pi}\int \frac{dS\sin\theta}{r^2} = \frac{I}{4\pi}\int \frac{d\theta}{r} = \frac{I}{4\pi a}\int_0^\pi \sin\theta d\theta = \frac{I}{2\pi a}, \tag{5.3.24}$$

がえられます。式 (5.3.3) と同じになりました。最後の積分は，$\sin\theta = a/r$ を用いて変形してある。

5.4　補足

5.4.1　単位

- 磁荷の単位：ウエーバー (Wb)，1[Wb]=1[J/A]
- $1[Wb/m^2] = 1[T] = 10^4[gauss]$
- ベクトル公式：$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \vec{\nabla}^2\vec{A}$ （証明してみましょう）。

5.5　演習問題

1. (a) 電荷と磁化の違いは何でしょうか？ (b) 電場と磁場の違いを説明してください。
2. 1[A] の電流が流れている直線導線から，距離 1[m] のところに出来る磁場を求めましょう。
3. アンペールの法則を説明してください。
4. 銅線を強さ I の電流が流れているとき，その微少部分 $d\mathbf{s}$ が，そこから距離 $\mathbf{r}$ 離れた点に作る磁場 $\mathbf{H}$ は
$$d\vec{H} = \frac{I}{4\pi r^2}d\vec{s}\times\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$
で与えれれます。強さ I の直線電流から距離 a のところにある点 P の磁場 B を求めましょう。
5. 半径が R の円筒導線に電流 I を流した。アンペールの法則を用いて，磁場 $H(r)$ を導線の中心からの距離 r の関数として求めましょう。円筒型の導線は円筒の表面にだけ電流が流れる。（図 5.8 と図 5.9 をヒントにしてください）

第 6 章

電磁誘導

この章では，発電機の原理でもある電磁誘導について学びましょう。身近な例では自転車のライトを付けるためにダイナモとよばれる小型の発電機があります。我々が毎日使っている電力（電気）の発電の原理はここにあります。

6.1　ベクトルの外積

その前に，ベクトルの外積（ベクトル積）について復習しましょう（3.3 節も参考に）。外積はこれから勉強するローレンツ力を考えるときに重要です。しっかり理解してください。

２つのベクトル $\vec{A}$ と $\vec{B}$ を考えましょう。この２つのベクトルを使って行う演算は, 内積と外積の２つしかありません。高校数学では内積は勉強したと思います。外積は大学でしか習わないので,「私は大学生！」と，最も簡単に大学生であることをアピールできるところだと思います。２つのベクトルの内積はスカラー量ですが，外積はベクトル量になるところがちょっとおもしろい。

内積（スカラー積）の定義は

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta, \tag{6.1.1}$$

です。ここで，θ は２つのベクトルの間の角度をしめします。あるいは，成分でかくと，

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z, \tag{6.1.2}$$

となり，２つのベクトルの内積はスカラー量となります。

これにたいして，ベクトル積の大きさは

$$|\vec{A}\times\vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta, \tag{6.1.3}$$

と定義されています。これは図 6.1 に示したように，２つのベクトル $\vec{A}, \vec{B}$ が作る平行四辺形の面積に対応しています。

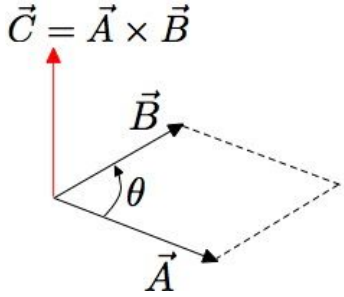

図 6.1　ベクトル積

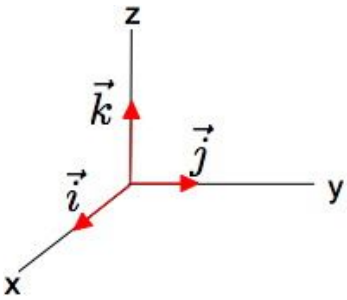

図 6.2　単位ベクトル

さらに，２つのベクトルの外積は成分で書くと，

$$
\begin{aligned}
\vec{A} \times \vec{B} &= (A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}) \times (B_x\vec{i} + B_y\vec{J} + B_z\vec{k}) \\
&= (A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}) \times B_x\vec{i} \\
&\quad +(A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}) \times B_y\vec{j} \\
&\quad +(A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}) \times B_z\vec{k} \\
&= A_xB_x\vec{i} \times \vec{i} + A_yB_x\vec{j} \times \vec{i} + A_zB_x\vec{k} \times \vec{i} \\
&\quad +A_xB_y\vec{i} \times \vec{j} + A_yB_y\vec{j} \times \vec{j} + A_zB_y\vec{k} \times \vec{j} \\
&\quad +A_xB_z\vec{i} \times \vec{k} + A_yB_z\vec{j} \times \vec{k} + A_zB_z\vec{k} \times \vec{k},
\end{aligned} \tag{6.1.4}
$$

となります。ここで，図 6.2 に示す直交する単位ベクトルの間には

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0, \tag{6.1.5}$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = -\vec{j} \times \vec{i} = \vec{k}, \tag{6.1.6}$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = -\vec{k} \times \vec{j} = \vec{i}, \tag{6.1.7}$$

$$\vec{k} \times \vec{i} = -\vec{i} \times \vec{k} = \vec{j}, \tag{6.1.8}$$

の関係式がなりたつので，代入すると，

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\vec{i} + ((A_zB_x - A_xB_z)\vec{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\vec{k} \tag{6.1.9}$$

となります。あるいは，行列式を用いて

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix},$$
$$=(A_yB_z-A_zB_y)\vec{i}+((A_zB_x-A_xB_z)\vec{j}+(A_xB_y-A_yB_x)\vec{k} \qquad (6.1.10)$$

と書いてもよい。ベクトル積はベクトル量なので，もちろん方向を持っているわけですが，それは次のように定義されています：

ベクトル積 $\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}$ の方向は，ベクトル $\vec{A}$ から $\vec{B}$ の方向に 180 度以内の角 θ で右ねじを回したとき，右ねじが進む方向がベクトル積の方向となります。図 6.1 で示した $\vec{C}$ の方向になります。明らかに，ベクトル $\vec{C}$ は $\vec{A}$ と $\vec{B}$ にたいして垂直であることがわかりますね！つまり $\vec{A}\cdot\vec{C}=0$, あるいは $\vec{B}\cdot\vec{C}=0$ がなりたちます。これを使えばベクトル公式

$$\vec{A}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{A}\cdot\vec{C}=0, \qquad (6.1.11)$$

が常に成り立つことは容易に解るでしょう。

6.1.1　ベクトル積の方向

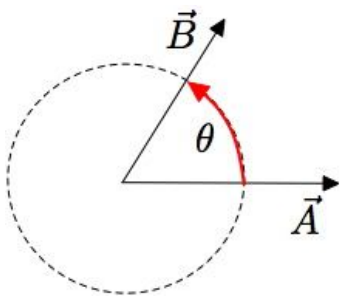

図 6.3　ベクトル積の方向。図 6.1 を上から見た図

ベクトル積 $\vec{A}\times\vec{B}$ の方向は，前述したようにベクトル $\vec{A}$ から $\vec{B}$ の方向に 180 度以内の角 θ で右ねじを回したとき右ねじが進む方向が，ベクトル積の方向です。図 6.3 に示したように，$\vec{A}$ から $\vec{B}$ の方向に 180 度以内の角 θ で右に回すと，ねじは紙面の裏から表方向に進みます。この進む方向が外積 $\vec{A}\times\vec{B}$ の方向となります。

では，$\vec{B}\times\vec{A}$ はどの方向になるでしょうか？この場合は，$\vec{B}$ から $\vec{A}$ の方向に 180 度以内の角 θ で右ねじを回すわけですから，図 6.3 の赤矢印とは逆方向に回すので，ねじは紙面の表から裏にすすみます。つまり逆方向になるわけです。ということで，

$$\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}, \qquad (6.1.12)$$

がなりたちます。大きさ（絶対値）は同じですが，外積の方向は 2 つの場合では 180 度，異なることに注意してください。

これから勉強する，ローレンツ力はこの外積が解っていないと理解できませんので，しっかり復習してください。

6.2　力＝電流 × 磁場

コイル（導線）に磁石を近付けたり，遠ざけたりするとコイルに電流が流れます。磁場と電流という全く異なるものは実は密接に関係していることを学びましょう。ここで重要な力がローレンツ力です。

6.2.1　ローレンツ力

ローレンツ力は電流と磁場によって作り出される力です。図 6.4 のように磁場 ($\vec{B}$) の中で，導線に電流 ($\vec{I}$) を流すと，青の矢印の方向に力 ($\vec{F}$) が働きます。この力をローレンツ力とよびます。磁石の下で導線に電流を流すだけで導線に力が働くのです。不思議ですね。

従って導線はローレンツ力に引っ張られて青い矢印の方向に動くことになります。

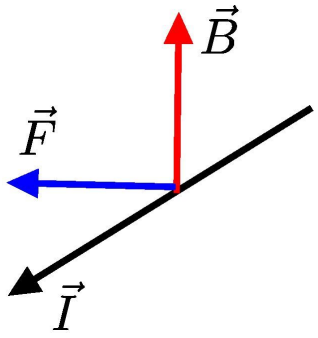

図 6.4　ローレンツ力

このローレンツ力と電流と磁場の間には

$$\vec{F} = \vec{I} \times \vec{B}, \tag{6.2.1}$$

の関係が成り立ちます。導線の中を流れる電流の方向は，正の電荷 q を持った荷電粒子が速度 $\vec{V}$ で流れる方向と定義してあるので，電流は

$$\vec{I} = q\vec{V}, \tag{6.2.2}$$

で与えられます。

したがって，式 (6.2.2) は，

$$\vec{F} = q\vec{V} \times \vec{B}, \tag{6.2.3}$$

となります。

さて，数学で習った外積を思い出してほしい。２つのベクトルの外積はベクトル量ですから，当然このローレンツ力も方向を持つベクトル量となります。そうです，電流の方向 $\vec{V}$ から磁場の

方向 $\vec{B}$ に向かって１８０度以内の角度で右ねじを回したときに右ねじが進む向きが（右ねじの法則），ローレンツ力 $\vec{F}$ の方向です。ベクトルの外積なので，$\vec{F} = q\vec{B} \times \vec{V}$, のように速度と磁場を入れ替えると，外積の向きは逆になるので，注意しましょう。必ず磁場が最後の項にあります。

フレミングの左手の法則と呼ばれる覚え方があります。左手の中指を電流 $\vec{I}$ の方向にして，人差し指を磁場の方向 $\vec{B}$ に向けて，親指を人差し指と垂直にすると，その親指の指す方向がローレンツ力 $\vec{F}$ の方向になります。しかし，右ねじの法則を覚えていればフレミングの法則で力の方向を考える必要はないので，フレミングという偉大な物理学者の名前だけ覚えておくだけで十分です。

図 6.5 は電荷 q を持つ粒子（荷電粒子：白丸）にかかるローレンツ力を示しています。荷電粒子が右方向に速度 $\vec{V}$ で動いているとき，磁場 $\vec{B}$ を上方向にかけると，紙面の裏から表の方向にローレンツ力をうけます。そうするとこの粒子の飛んでいく方向は少し曲がりますね。つまり粒子の軌跡を磁場で制御することが可能になるわけです。

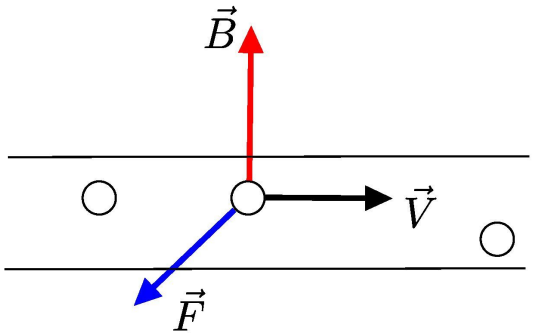

図 6.5　荷電粒子に働くローレンツ力

さて，このような状況は我々の体の中にも起こるかも知れません。たとえば，血液中の赤血球（図 6.6(a)）やタンパク質は電荷を持っています。イオン化した粒子はすべて電荷 q を持っています。我々の体の中にはこのイオン化された荷電粒子がいたるところにあります。もし我々が強い磁場中に入っていくとどうなるでしょうか？実験はしたことありませんが，考えて見てください。近い将来，リニアーモーターカーが走ると思います。磁石を使ってあんな重い車体を持ち上げているんです。大丈夫かなーー？と心配するのは物理を知っている人だけですね？

肩こりに効くといわれる「ピップエレキバン」という商品を知っていますか？ようするに，肩に磁石を貼り付けるという商品ですが，かなり昔からあります。サテ，このピップエレキバンを物理的に理解してみましょう。図 6.6(b) は肩あたりに貼った磁石とその下を流れる血液の模式図です。たとえば右方向に，いろいろな荷電粒子を含む血液が流れていて，磁石による磁場が上向きにかかると，ローレンツ力で粒子の動きが変わりますね。さて，これと血行がよくなるとかよくならないとかの議論は私には解りません。皆さんで考えてみてください。色々なところにローレンツ力は現れてきます。

ここまでの話は，電場が無い場合を取り上げましたが，一般に，電場 $\vec{E}$ と磁場 $\vec{B}$ の中を，速度 $\vec{V}$ で動く電荷 q を持った粒子に働く力は

$$F = q(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}). \tag{6.2.4}$$

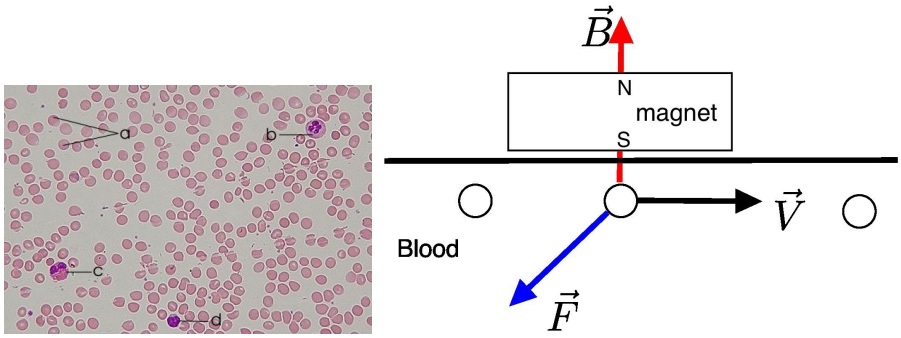

図 6.6　(a) 血液標本,　　(b) 血液と磁石

で与えられます。これが広い意味でのローレンツ力です。電荷が静止していれば $F = q\vec{E}$ となり，これを静電場とよびます。止まっている電荷にはクーロン力が働き，動いている電荷にはローレンツ力が働きます。

6.3　いろいろな電磁誘導

ここではいろいろな電磁現象を紹介しましょう。すべてローレンツ力で理解することができます。

6.3.1　磁場内に置かれた導線に電流を流すと導線は動く

これは，図 6.4 に書いたことの繰り返しになりますが，もう少し詳しく説明してみましょう。導線内の電子が単位体積あたり n 個含まれているとしましょう。電子の速度を $\vec{v}$ とすると、電子 1 個が受けるローレンツ力は $\vec{F}_1 = -e\vec{V} \times \vec{B}$ です。導線の断面積を A とすると、長さが L の部分には、nLA 個の電子が含まれるので、導線内を流れる電流は単位長さあたり、

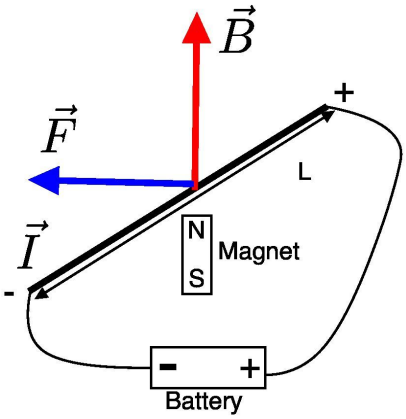

図 6.7　磁場内に置かれた導線に電流を流すと導線は動く

$$\vec{I} = -enA\vec{V},\ [C/s] \tag{6.3.1}$$

で与えられます。電子は $-e$ の電荷を持つので，＋方向（図 6.7 の左から右）へ流れます。それに対して電流は逆方向のプラスからマイナス方向に流れると定義されています。電流の流れる向きと電子の流れる向きは逆方向であることに注意してください[*1]。式 (6.2.1) に代入すると，単位長さあたり、

$$\vec{F} = -enA\vec{V} \times \vec{B}, \tag{6.3.2}$$

のローレンツ力が働くことになります。

電子になったつもりで上の式を眺めてみましょう。電子はマイナスの電荷を持つので図 6.7 の左から右へ速度 $\vec{V}$ で流れます[*2]。電流の流れる向きは電子と逆方向ですからベクトル $\vec{I}$ は右から左の向きと言うことになります。従って，ローレンツ力は右ねじの法則で図の左の方に作用し，導線は少し左に移動することでしょう。

6.3.2　磁場内で電線を動かすと電流ができる

こんどの実験は，電池は外して，磁石と導線だけを置いてみましょう。この状態で，図 6.8 の磁場 ($\vec{B}$) の中で，x 軸方向に速度 $\vec{V}$ で導線を動かしてみましょう。導線内には自由に動ける電子があります。そうすると，1 個の電子に

$$\vec{F} = -e\vec{V} \times \vec{B}, \tag{6.3.3}$$

のローレンツ力が働きます。このローレンツ力によって電子は C から D の方向に動き電流は D から C の方向に流れることになります。その結果 C と D の間に電位差 (V_{CD}) が生じます。定常的に導線を動かすときは，ローレンツ力と電位差がつりあったいるので，

$$-e\vec{E} = -e\vec{V} \times \vec{B}, \tag{6.3.4}$$

がなりたちます。この電場を誘導電場とよびます。

CD 間の電位差は電場を CD 間の長さ L にわたって積分すればよいので

$$V_{CD} = \int_L \vec{E} \cdot d\vec{L} = \int_L (\vec{V} \times \vec{B}) \cdot d\vec{L} \tag{6.3.5}$$

で与えられます。最後の等号は式 (6.3.4) を用いた。さらにベクトル公式

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = -\vec{B} \cdot (\vec{A} \times \vec{C}) \tag{6.3.6}$$

を用いて式 (6.3.5) を書き換えると

$$V_{CD} = \int_L (\vec{V} \times \vec{B}) \cdot d\vec{L} = -\int \vec{B} \cdot (\vec{V} \times d\vec{L}), \tag{6.3.7}$$

となります。

[*1] これは，電流が発見されてから電子が発見されたという歴史的なことに起因しています。最初に電流を発見した人が，電流の流れる方向を「＋極から－極へ」と定義しました。その後電子が発見されて，実は電子はマイナスの電荷を持っていたのです。

[*2] この電子が流れると他の粒子と衝突したりして摩擦が起こります。この摩擦が熱になって導線がだんだん暖かくなってきます。この熱のことをジュール熱と呼びます。

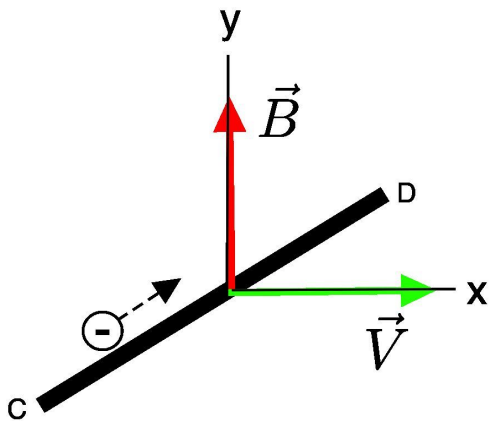

図 6.8　磁場内で電線を動かすと電流ができる

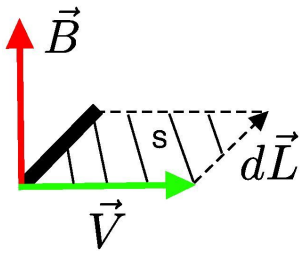

図 6.9　$|\vec{V} \times d\vec{L}|$ の意味

さて，ここで，$|\vec{V} \times d\vec{L}|$ について考えましょう。次元解析すると V は速度 [M/S]，dL は長さ [M] の単位を持つので，$|\vec{V} \times d\vec{L}|$ は単位時間あたりの面積 [M^2/S] の次元を持つことがわかります。つまり，図 6.9 に示したように，$|\vec{V} \times d\vec{L}|$ は導線の長さ $d\vec{L}$ の部分が，速度 $\vec{V}$ で動いたときに，磁場 $\vec{B}$ を貫く単位時間あたりの面積 (S) の意味を持つことになります。したがって，

$$\vec{V} \times d\vec{L} = \frac{d\vec{S}}{dt}, \tag{6.3.8}$$

と書くことができます。ここで t は時間を示します。左辺の 2 つのベクトルの外積はベクトル量なので，面積 S もベクトル量になります。これは時間によって面積が増えたり減ったりすることを意味します。

式 (6.3.7) に式 (6.3.8) を代入すると，

$$\begin{aligned} V_{CD} &= -\int \vec{B} \cdot (\vec{V} \times d\vec{L}) = -\int \vec{B} \cdot \frac{d\vec{S}}{dt}, \\ &= -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{S}, \\ &= -\frac{d\Phi}{dt}, \end{aligned} \tag{6.3.9}$$

となります。この V_{CD} を誘導起電力とよびます。ここで，

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}, \tag{6.3.10}$$

は単位時間に導線が横切る磁束を示します。

$$V = -\frac{d\Phi}{dt}, \tag{6.3.11}$$

は，ファラデーの法則とよばれ，磁場の時間変化に応じて起電力が生じ，電流が流れることを意味します。マイナスの符号がついているのは，磁場が増えると起電力が減少する方向に電流が流れるということを意味します。

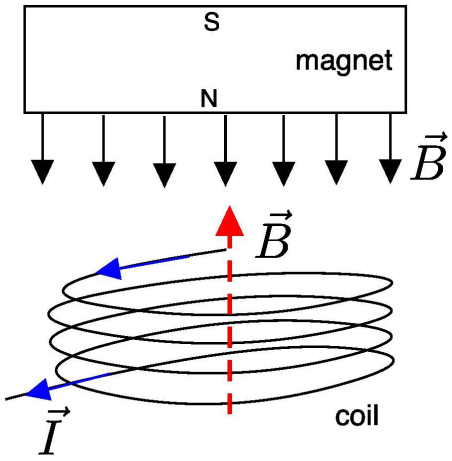

図 6.10　発電機の原理

たとえば，図 6.10 のように導線をぐるぐる巻きにしたコイルと磁石を用意しましょう。磁石があれば磁場 $\vec{B}$ が発生します。図 6.8 で説明したように磁場中で導線を動かすと電流が流れます。コイルを速度 $\vec{V}$ で上下に動かすことと，磁石を上下に動かすことは同じことです。ここではコイルは固定して，磁石を速度 $\vec{V}$ でコイルに近づけてみましょう。するとコイル内の磁場（磁束）は増加します。その結果，式 (6.3.11) にしたがって，コイル内の磁束を減らす向きに電流が流れます。つまり磁石の磁場と反対方向の磁場がコイルから作られます。この場合コイル内に電流が左巻きの方向に流れます。これがコイルと磁石から作られた誘導電流です（右手の法則で，磁場を上向きに出すには電流は左回転になる）。磁石を遠ざけると逆向きに電流が流れます。

このように，一定の速度で磁石をコイルに近づけたり遠ざけたりすることで，電流を作ることが出来ます。この電流を誘導電流とよびます。これが自転車などに使われているダイナモの原理となります。発電所の発電機はこれをずっと大きくしたものです。日々電流を作って我々の家まで届けてくれています。この原理だけなら CO_2 放出とは何の関係もないようなのですが，なぜ電力を使うことと環境問題が関係するのでしょうか？考えてみましょう。

このような，ローレンツ力による電磁誘導は，その他にも，シンクロトロン，超伝導電磁石（リニアモーターカー），ホール効果，などいろいろあります。時間があれば紹介します。暇なときにでも Google で検索してもいいでしょう。

6.3.3　電磁誘導の式

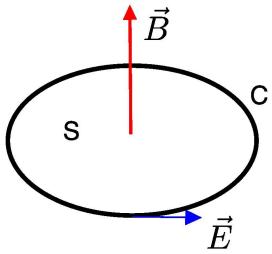

図 6.11　閉回路に電流が流れる

図 6.11 のように磁場 $\vec{B}$ の中で固定したコイルがつくる閉曲線 C にそって電流が流れている状態を考えましょう。図 6.10 のコイル一巻きを考えています。式 (6.3.11) の誘導起電力の左辺はコイルの作る閉曲線 C にそって $\vec{E}\cdot d\vec{L}$ を線積分したものなので，

$$V = \oint_C \vec{E}\cdot d\vec{L}, \tag{6.3.12}$$

で与えられます。一方，式 (6.3.11) の右辺は曲面 S を通る磁束（磁場）の時間変化なので，式 (6.3.11) と (6.3.12) から

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{L} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}, \tag{6.3.13}$$

がなりたちます。ここで，線積分と面積積分の返還式（ストークスの定理）を用いると，式 (6.3.13) の左辺は

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{L} = \int_S (\vec{\nabla}\times\vec{E})\cdot d\vec{S}, \tag{6.3.14}$$

のように変形でき，式 (6.3.13) は

$$\int_S (\vec{\nabla}\times\vec{E})\cdot d\vec{S} = -\int_S \frac{d\vec{B}}{dt}\cdot d\vec{S}, \tag{6.3.15}$$

で与えられることがわかります。ここでは面積 S は時間変化しないと考えています。この式が電磁誘導の数学的記述です。両辺を面積で微分すれば，

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}, \tag{6.3.16}$$

がなりたちます。これが電磁誘導の式の微分型になります。電磁気学の基礎方程式である 4 つのマクスウェルの方程式の最後の 1 つです。磁場の時間変化は誘導電流を生みだすのです。

6.3.4　回路が変化する場合

ここでは，磁場は一定で回路が変化する場合について考えましょう (演習問題 (6.4.4))。一様な磁場 $\vec{B}$ の中で，これに垂直に一辺の長さが L の正方形の閉回路（導線）を置き，その一辺 AB を

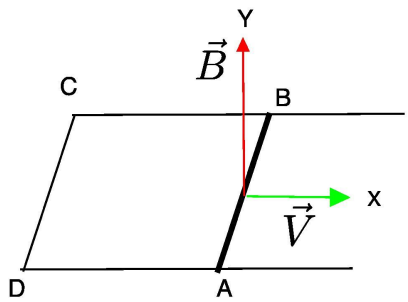

図 6.12　AB の回路を動かす

磁場と垂直に速度 $\vec{V}$ で動かすと，何が起こるか？図 6.12 で，B-C-D-A の回路は固定されていて動かないが，AB 間の導線だけ左右に動ける場合を考えてください。

導線 AB を右に定常的に動かすと，電子は $F = -e\vec{V} \times \vec{B}$ のローレンツ力を受けて，A から B の方向に流れます。AB 間の電位差は式 (6.3.5) より，

$$V_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{L} = \int_A^B (\vec{V} \times \vec{B}) \cdot d\vec{L}, \tag{6.3.17}$$

で与えられます。速度 $\vec{V}$ は x 軸方向，磁場 $\vec{B}$ は y 軸方向にあるので，

$$\vec{V} = (V_x, 0, 0), \vec{B} = (0, B_y, 0), \tag{6.3.18}$$

を代入すると，

$$\vec{V} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ V_x & 0 & 0 \\ 0 & B_y & 0 \end{vmatrix} = V_x B_y \vec{k}, \tag{6.3.19}$$

となります。したがって式 (6.3.17) は

$$V_{AB} = V_x B_y \int_A^B \vec{k} \cdot d\vec{L} = V_x B_y \int_A^B |\vec{k}||d\vec{L}| = V_x B_y L, \tag{6.3.20}$$

となります。ここで，z 方向の単位ベクトル $\vec{k}$ と AB 間の導線の方向 $d\vec{L}$ は平行であるので，積分は AB 間の長さ L になります。したがって速度 $\vec{V}$ の大きさは

$$V_x = \frac{V_{AB}}{B_y L}, \tag{6.3.21}$$

で与えられます。

AB の長さが 0.2[M]，　磁場が 1[T: テスラー]=10^4[Gauss] であるとして，1[V: ボルト] の起電力を得るための速度を求めてみよう。

$$V_x = \frac{1[V]}{1[T]0.2[M]} = 5[VT^{-1}M^{-1}], \tag{6.3.22}$$

となります。このままでは単位が何のことか解らないので，次元解析して速度の単位になるか確かめましょう。電位 [V] とテスラー [T] はそれぞれ，

$$[V] = [M^2 K_g S^{-3} A^{-1}], \quad [T] = [K_g S^{-2} A^{-1}], \tag{6.3.23}$$

で与えられるので，$V_x = 5[M/S]$ になります。時速に直すと約 18[Km/h] です。

6.3.5　インダクタンスとコイル

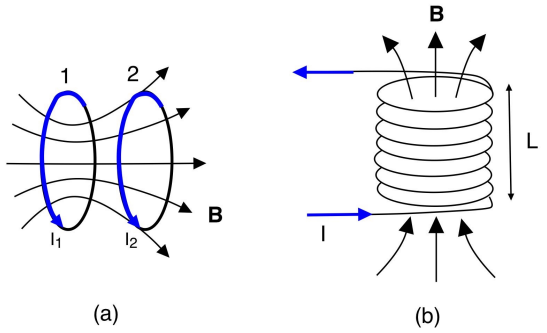

図 6.13　(a) 電流 I_1 がコイル 2 に誘導起電力を生じる（相互誘導）(b) コイルの自己誘導

コイルを使った電磁誘導を少し紹介します。図 6.13(a) は，2 つのコイルがあって，コイル 1 に電流 I_1 を流した場合です。そうすると，磁場 B によって，コイル 2 を貫く磁束 Φ_2 が生じます。磁束 Φ_2 は電流 I_1 に比例するので，

$$\Phi_2 = MI_1, \tag{6.3.24}$$

となります。ここで，電流 I_1 を時間的に変化させると，磁束 Φ_2 も時間変化します。電磁誘導のファラデーの法則 (式 (6.3.11)) によって，コイル 2 に

$$V_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -M\frac{dI_1}{dt}, \tag{6.3.25}$$

の誘導起電力が生じることになります。この現象を相互誘導とよび，比例定数 M を相互インダクタンスとよびます。コイル 1 を N_1 巻きのコイルとすると，同じ電流を流しても磁場は N_1 倍になり，M は N_1 倍になります。

1 つのコイルでも図 6.13(b) のように導線を何重かに巻いたコイルに電流 I をながして，その電流が時間的に変化するとその電流が作る磁場 B が時間的に変化し，電磁誘導で起電力を生じます。これを自己誘導とよびます。コイルの作る磁束は $\Phi = LI$ であたえられるので，電磁誘導のファラデーの式を用いて起電力は

$$V = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt}, \tag{6.3.26}$$

で与えられます。このようなコイルを回路の中に入れると，時間的に変化する起電力を持った電池を挿入したのと同じことになります。比例定数 L を，そのコイルの自己インダクタンス，または単にインダクタンスとよびます。インダクタンスの SI 単位は，ヘンリー (henry) とよばれ，$\mathrm{henry} = \mathrm{V \cdot s/A}$ です。

このようなコイルは 4.3 で説明した電気回路に組み入れることができます。図 6.14 のように，コイルと抵抗を直列につないだ回路を考えましょう。起電力 V の電池を接続し，スイッチ S を閉

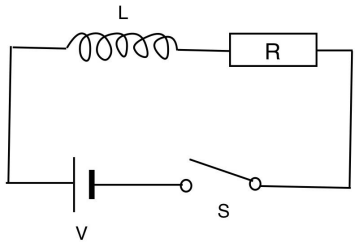

図 6.14　コイルと抵抗をつないだ LR 回路

じるとどうなるでしょうか？キルヒホッフの法則を用いると，コイルの自己誘導による起電力も考慮して，流れる電流を I とすると，

$$V - L\frac{dI}{dt} = IR, \tag{6.3.27}$$

が成り立ちます。電流 I の時間変化は，この微分方程式を解くことでわかります。初期条件として，$t = 0$ で $I = 0$ なので，電流 I の時間変化は，

$$I = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-Rt/L}\right), \tag{6.3.28}$$

となります。時間が経つにつれて，電流 I はオームの法則から決まる値 V/R に漸近していきます (図 6.15)。時間 $t^* = L/R$ で約 63% の電流が流れます。最終的には電流の変化はゆるやかになり、コイルの両端の電圧は 0 に近くなり、まるでコイルなど存在していないかのような状態になります。自己インダクタンス L が大きいほど、抵抗 R が小さいほど、安定して流れ始めるのに時間がかかるわけです。

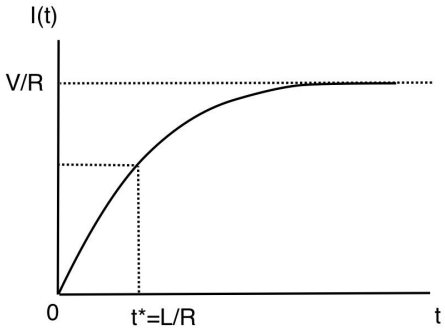

図 6.15　式 (6.3.27) の電流変化

最後に，コイルとコンデンサーをつないだ LC 回路について考えてみよう。図 6.16 のように，インダクタンス L のコイルと電気容量 C のコンデンサーを直列につないだ。キルヒホッフの第 2 法則を適用しましょう。コンデンサーの電位は $V = Q/C$ で，コイルには誘導起電力 $-LdI/dt$ があるので，

$$L\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = 0, \tag{6.3.29}$$

が成り立ちます。さらに，電流は

$$I = \frac{dQ}{dt}, \tag{6.3.30}$$

で与えられます。式 (6.3.29) を用いると，式 (6.3.30) は，

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} = -\frac{Q}{C}, \tag{6.3.31}$$

となります。力学ですでに勉強していると思いますが，この式 (6.3.31) は，単振動の運動方程式と同じになります。解は

$$Q = Q_0 \cos\omega_0 t, \tag{6.3.32}$$

となります。ここで，$t = 0$ で Q_0 の電荷がたまっていたとする。$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ は電荷の振動数を示します。したがって，電流は

$$I = dQ/dt = -Q_0\omega_0 \sin\omega_0 t, \tag{6.3.33}$$

となります。

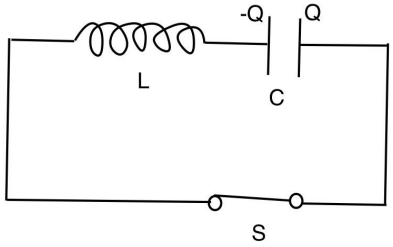

図 6.16　コイルとコンデンサーをつないだ LC 回路

その他にも，コイル，抵抗，コンデンサーを組み合わせることでいろいろな電気回路がつくれます。LCR 回路などなど $\cdots$。

6.3.6　変位電流

図 6.16 にもう一度戻ってみましょう。導線に沿って電流 I を流したとして，平板コンデンサーの間では電流は突然ゼロになっているのでは，と思いませんか？実は，「コンデンサーの間で変動する電場はあたかも電流のように振舞うことができる」のです。導線がなくても，コンデンサーがあればそこに蓄えられた電荷を調整して，時間変化する変動電場を作ることができます。電場の大きさを $E(t)$ とすると，式 (3.2.2) から

$$I = \frac{dQ}{dt} = \epsilon_0 S\frac{dE}{dt}, \tag{6.3.34}$$

となります。したがって，電場が時間変動しているときは，電流密度

$$\vec{j} = \epsilon_0\frac{d\vec{E}}{dt} = \frac{d\vec{D}}{dt}, \tag{6.3.35}$$

が生じているように振る舞うことができます。ここで，$\vec{D}$ は式 (3.3.1) で学んだ電束密度です。この電流 j を変位電流または電束電流とよびます。

6.4　補足

6.4.1　交流

電磁誘導を利用した発電機などでは，コイルを貫く磁束を $\Phi = \Phi_0 \sin \omega t$ のように時間的に変化させて誘導起電力を得ている。このように時間的に変化する起電力は，

$$V = V_0 \cos \omega t, \tag{6.4.1}$$

などで与えられ，交流起電力とよばれています。ω は角周波数，$f = \omega/2\pi$ を周波数とよびます。交流 $(\omega \neq 0)$ と直流 $(\omega = 0)$ の違いはここにある。

6.5　演習問題

1. $\vec{A} = (A_x, 0, 0)$, $\vec{B} = (0, B_y, 0)$ の 2 つのベクトルの外積を計算して、外積の大きさと方向を答えてください。
2. $\vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = 0$ が成り立つことを証明してください。（図を書いて考えると簡単です。）
3. $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$ が成り立つことを証明して。
4. 一様な磁場 $\mathbf{B}$ の中でこれに垂直に正方形の回路（導線）を置き，その一辺 ab を磁場と垂直方向に速さ $\mathbf{V}$ で動かした。

   (a) 何が起こるか？

   (b) ab 間の電位差は

   $$V_{AB} = \int_a^b (\vec{V} \times \vec{B}) \cdot d\mathbf{L} \tag{6.5.1}$$

   です。$\vec{V} = (V, 0, 0)$, $\vec{B} = (0, B, 0)$ として、電位差を計算してください。

   (c) ab の長さが $50cm$，磁場が 1 T(=10^4 gauss) であるとき，1 V の起電力を得るための速度 v を求めてください。
5. 式 (6.3.27) を解いて，式 (6.3.28) を導きましょう。図 6.15 で，十分に時間が経ったあとで，電池を取り除いて，スイッチをオンにするとどうなるでしょうか？式 (6.3.27) はどうなるかな？

第 7 章

マクスウェル方程式と電磁波

この章では，これまでにでてきたマクスウェル方程式について復習した後，この方程式が実は電磁波と密接に関係していることについて説明します。電磁波とは何か？一見難しそうに感じるかもしれませんが，何のことはない我々が毎日見ている光です。

7.1　マクスウェル方程式

まずは，マクスウェルの方程式について復習しておきましょう。式の意味とその式を絵にできるかが重要です。式を見たら絵が浮かぶとか，絵を見たら式が浮かぶとかになれば，あなたには物理的センスが十分あります。もちろん最初は誰もわかりませんが，何度も勉強するうちにいつの間にか身に付くものです。自分を信じて恐れず考えることです。あるいは最初は丸暗記でもいいでしょう。

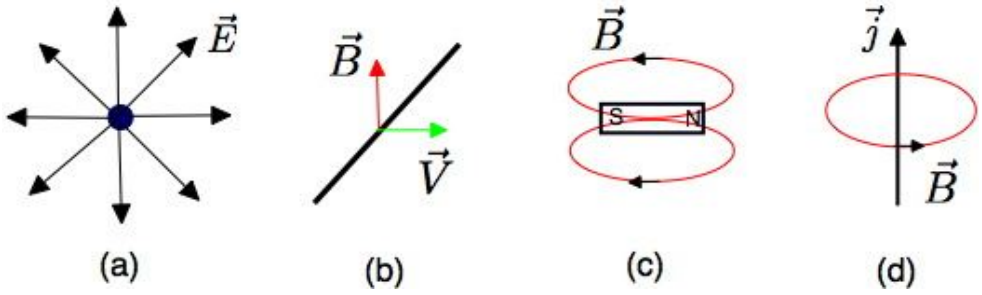

図 7.1　マクスウェル方程式

まず始めは，図 2.3 の温泉からのお湯のわき出しを思い出しましょう。温泉口からお湯がわき出す現象と，プラスの電荷から電場 $\vec{E}$ がわき出す現象の数学的表現は同じでした（図 7.1(a))。それは，

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0, \tag{7.1.1}$$

でしたね。ここで，ρ はわき出し口での電荷密度，ϵ_0 は真空の誘電率，空気中もほとんど同じ値です。電荷はプラスの電荷とマイナスの電荷に分離することができましたね (真電荷)。

次は，図 6.11 で電磁誘導の式として紹介しました。磁場 $\vec{B}$ の中で導線を速度 $\vec{V}$ で動かすと電流が流れる，という内容でした。発電機の原理です。それは，（図 7.1(b)）

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \tag{7.1.2}$$

です。磁場の時間変化が電流を生み出すのです。

３つめは，図 5.5 で説明した磁場の本質である真磁化は存在しないです。つまり，磁石の N 極や S 極は単独では存在しないということでした。必ず N 極から出た磁場は S 極に向かい循環している：

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \tag{7.1.3}$$

磁場にはわき出し口も吸い込み口も存在しない。磁場は必ず循環（閉曲線）するということでした。

最後は図 5.6 で説明したアンペールの法則です。電流 $(\vec{j})$ を流すと回りに磁場 $(\vec{B})$ ができる (逆も可能である)。磁場の向きは右手の法則で

$$c^2\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}/\epsilon_0. \tag{7.1.4}$$

と書けます。右辺の第一項は変位電流（式 (6.3.35)）を示します。電流は電束密度の時間変化 $(\partial\vec{D}/\partial t)$ である変位電流によっても流すことができます。コンデンサーにたまった電荷を流すことで電流を流すことが出来ます。この変位電流を考慮すると，式 (5.3.8) は式 (7.1.4) となります。定数 $c = 3 \times 10^8$[M/S] は光の速度です。あるいは，$c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ でも同じことです。

さて，この４つのマクスウェル方程式は何を意味しているのでしょうか？そこから出てくるある法則について以下で考えていきましょう。

7.2　電磁波とマクスウェル方程式

まず，話を簡単にするために，電荷と電流が存在しない状況でのマクスウェルの方程式を考えましょう。そこで，$\rho = 0, \vec{j} = 0$ とすると

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \tag{7.2.1}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \tag{7.2.2}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \tag{7.2.3}$$

$$c^2\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \tag{7.2.4}$$

となります。

さて，これはいったい何を意味するのでしょうか？電場も磁場も波ですから，これらの式からいったい何が導かれるのでしょうか？

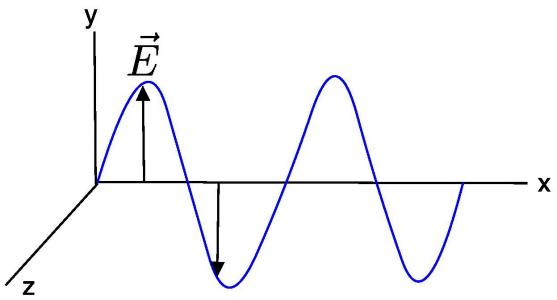

図 7.2　x 軸方向に伝わる電場（平面波）

7.2.1　電場

一例として，x 軸方向に伝わる電場（平面波）を考えましょう。図 7.2 のように sin や cos で記述される波を考えましょう。したがって，電場ベクトルの成分は

$$\vec{E} = (0, E_y(x), 0), \tag{7.2.5}$$

となります。例えば，$E_y(x) = \sin(2\pi x/L)$ のような関数型を考えればよいでしょう。式 (7.2.5) を式 (7.2.1) に代入し計算すると，

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0, \tag{7.2.6}$$

がなりたつことがわかります。電荷が存在しない空間では式 (7.2.5) は式 (7.2.1) を満たすことが解ります。

次に，式 (7.2.5) を式 (7.2.2) に代入して計算してみよう。以下ではまず，左辺の各成分の計算を行います：

$$(\vec{\nabla} \times \vec{E})_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0, \tag{7.2.7}$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{E})_y = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0, \tag{7.2.8}$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{E})_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x}. \tag{7.2.9}$$

上の計算で，z 成分以外はゼロになります。したがって，式 (7.2.2) から，

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}, \tag{7.2.10}$$

が成り立つことが解ります。電場が y 成分だけなら，磁場は z 成分だけをもつことになります。つまり，磁場ベクトルの各成分は，x 軸方向に伝わる z 軸に平行な波であり，

$$\vec{B} = (0, 0, B_z(x)), \tag{7.2.11}$$

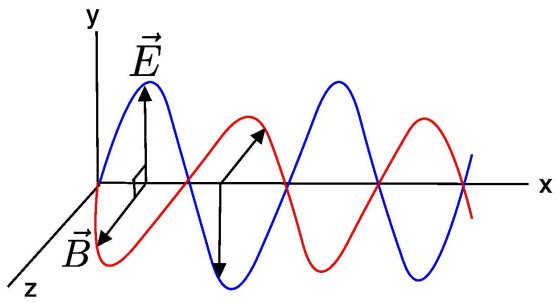

図 7.3　x 軸方向に伝わる電場と磁場（電磁波）

でなければならないことがわかります。したがって，電場が存在すると必ず磁場が存在して，その電場と磁場は直交する波であるという結論になります。

図 7.3 は x 軸方向に伝搬する電場と磁場を示しました。電場は $x-y$ 平面上を振動して x 方向に進み，磁場は $x-z$ 平面上を振動して x 軸方向に進みます。互いに直交した 2 つの波が存在することがわかります。

7.2.2　磁場

さらに，計算を進めましょう。式 (7.2.11) を式 (7.2.3) に代入して計算すると，

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0, \tag{7.2.12}$$

となり，磁場の式 (7.2.11) は式 (7.2.3) を満たすことがわかります。

最後に，式 (7.2.11) を式 (7.2.4) に代入して計算しましょう。式 (7.2.4) の左辺の各成分は以下のようになります：

$$c^2(\vec{\nabla}\times\vec{B})_x = c^2\left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right) = 0, \tag{7.2.13}$$

$$c^2(\vec{\nabla}\times\vec{B})_y = c^2\left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right) = -c^2\frac{\partial B_z}{\partial x}, \tag{7.2.14}$$

$$c^2(\vec{\nabla}\times\vec{B})_z = c^2\left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right) = 0. \tag{7.2.15}$$

したがって，y 成分以外はゼロとなり，式 (7.2.4) から

$$-c^2\frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial t}, \tag{7.2.16}$$

が成り立つことが解ります。

式 (7.2.10) と (7.2.16) をもう少し詳しく見ていきましょう。式 (7.2.10) の両辺を x で偏微分すると，

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 B_z}{\partial x \partial t}, \tag{7.2.17}$$

となり，さらに式 (7.2.16) の両辺を時間 t で偏微分すると，

$$-\frac{\partial^2 B_z}{\partial x \partial t} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial^2 t}, \tag{7.2.18}$$

となります。したがって，式 (7.2.17) と (7.2.18) から磁場に関する項を消すと，

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial^2 t}, \tag{7.2.19}$$

が得られます。左辺は空間変化，右辺は時間変化を示す。これは 1 次元の波動方程式と呼ばれています。この偏微分方程式の解は，例えば，

$$E_y(x) = E_0 \cos(x - ct) \tag{7.2.20}$$

となります。

同じように，式 (7.2.10) の両辺を t で偏微分すると，

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial^2 B_z}{\partial^2 t}, \tag{7.2.21}$$

さらに式 (7.2.16) の両辺を x で偏微分すると，

$$-c^2\frac{\partial^2 B_z}{\partial^2 x} = \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial t}, \tag{7.2.22}$$

となります。式 (7.2.21) と (7.2.22) から電場に関する項を消すと

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 B_z}{\partial^2 t}, \tag{7.2.23}$$

が得られます。これは，磁場に関する 1 次元の波動方程式です。この偏微分方程式の解は，例えば，

$$B_z(x) = B_0\sqrt{\epsilon_0\mu_0}\cos(x - ct), \tag{7.2.24}$$

となります（確かめてみましょう）[*1]。

7.2.3　ポインティングベクトル

図 7.3 は x 軸方向に進む電磁波を示します。ベクトル積 $\vec{E} \times \vec{B}$ は波の進行方向を向いています。$\vec{E}$ を右ネジの向きに $\vec{B}$ まで回すと，ネジは波の進行方向を向きます。これは，電磁場内のエネルギーの輸送を記述するベクトルであり，

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{B}, \tag{7.2.25}$$

はポインティングベクトルとよばれています。式 (7.2.5) と式 (7.2.11) を用いて，

$$\vec{S} = E_y(x,t)B_z(x,t)\vec{i}, \tag{7.2.26}$$

となります。

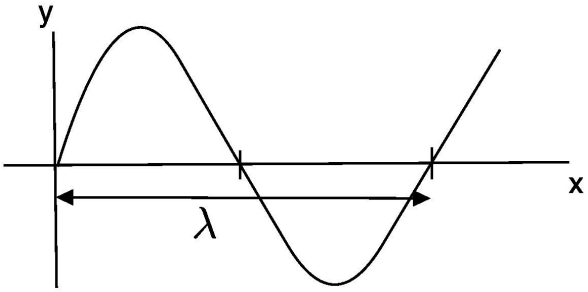

図 7.4　波長 λ の波

7.2.4　波の復習

ここで，波の定義について復習をしておきます。図 7.4 は波長 $\lambda[m]$ の波を示します。例えば，$y = \sin(2\pi x/\lambda)$ の波を考えればよいでしょう。波長だけでなく波を特徴づける量として波数があります。波数 q の定義は

$$q = 2\pi/\lambda, \tag{7.2.27}$$

です。波数の単位は $[\mathrm{m}^{-1}]$ です。2π の中に 1 波長の波が何個存在するかといった量です。波数 q をつかって，$y = \sin(qx)$ と書くこともできますね。

その他，周波数（振動数）もよく使われます。周波数の定義は，

$$f = c/\lambda, \tag{7.2.28}$$

です。ここで c は光の速度 $c = 3 \times 10^8[m/S]$ なので，周波数は単位換算すると，

$$f = c/\lambda = 3 \times 10^8[m/s]/\lambda[m] = \frac{3 \times 10^8}{\lambda}[s^{-1}], \tag{7.2.29}$$

となります。ここで $[\mathrm{s}^{-1}]$ のことを [Hz] (ヘルツ) という単位で書きます。では，1[Hz] はどんな波でしょうか？答えは，波長が $\lambda = 3 \times 10^8[m]$ の波のことです。とても長い波長を持った波ですね。波長が 3 億メートルの波ってどんなのか，想像することできますか？ラジオ電波の周波数（振動数ともよばれる）はこの f の値のことです。

このような周波数をもった電場と磁場が直交した波を電磁波とよびます。最も簡単に電磁波を表現すると電磁波は, 波数ベクトル $\vec{q} = (q_x, q_y, q_z)$ と空間の位置ベクトル $\vec{r} = (x, y, z)$ を使って，

$$\exp(i\vec{q} \cdot \vec{r}) = \cos(\vec{q} \cdot \vec{r}) + i \sin(\vec{q} \cdot \vec{r}), \tag{7.2.30}$$

で表現できます。左辺の表現はこれから数学や物理のいろいろなところで出てくると思います。フーリエ変換ではこの式がいたるところに出てきます。いろいろな波数 q を持った電磁波を思い出しましょう。例えば，波数ベクトルが $\vec{q} = (2\pi/\lambda, 0, 0)$ の波は，$\cos(2\pi x/\lambda)$ の平面波となります。

[*1] 演習問題 3

7.2.5　電磁波

さて，式 (7.2.1)〜(7.2.4) から導かれた結論は何でしょうか？そうです，電場と磁場は必ず直交した平面波になるということです。このような直交した電場と磁場のことを電磁波とよびます。電磁波は波長（あるいは周波数）によって様々な名前が付けられています。では，どんな電磁波があるのでしょうか？

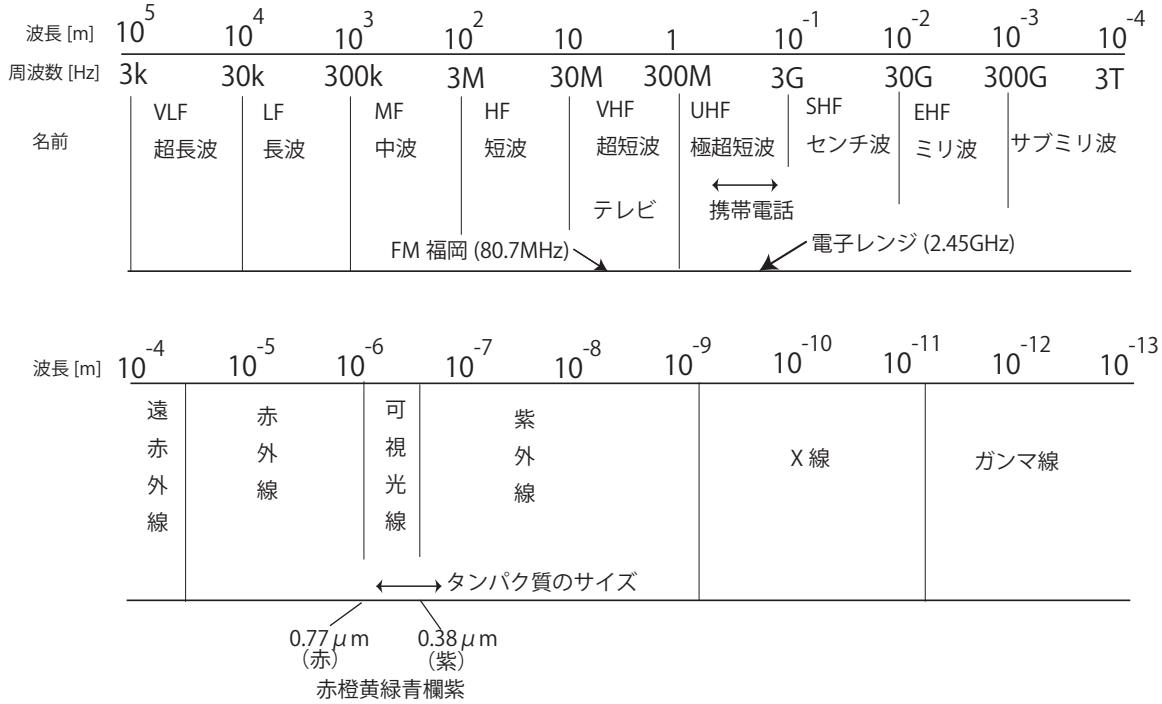

図 7.5　電磁波の種類

図 7.5 にいろいろな電磁波がまとめてあります。波長が 10^5[m] から 10^{-13}[m] まであります。波長（周波数）によっていろいろな名前が付けられていることが解ります。例えば，FM 福岡のラジオの周波数は 80.7MHz($= 80.7 \times 10^6$Hz) で，これも電磁波のひとつです。我々が日常使っている携帯電話の周波数は数百 MHz から 1 GHz 程度にあります。携帯電話会社によって周波数が割り振られています。ちなみに電子レンジは 2.45GHz の電磁波を出して水分子を振動させて沸騰させているのです。最近の携帯電話の周波数は情報量が多いので GHz 帯に移行してきています。ちょっと気になりませえか？もし携帯電波の周波数が 2.45GHz だとすると，我々の体の中の水分が携帯電話で沸騰するということが起こるかも知れませんね？考えすぎでしょうか？物理を知っていると世の中のいろいろなことが気になって仕方ありません。

我々人間が目に見える電磁波は，可視光線の領域だけです。わずか，0.77[μm] から 0.38[μm] の波長を持った電磁波だけが人間には見えるのです。それ以外は見えません。「赤が最も波長が長く，青や紫になるほど波長が短くなる」ということを覚えておくと何かと便利です。もし，我々が目にみえる電磁波の波長領域が携帯電話の波長領域まであったとしたら，どんな世界になるでしょ

うね？

電磁波の主な特徴を以下にあげておきます：

- 波長により電磁波の名前が決まっている
- 波長の長い電磁波ほど遠くまでとどく
- 可視光で一番は長の長いのは赤色
- 電磁波はその波長と同程度の大きさの物体と相互作用する（あるいは散乱される）

ちょっとここで，携帯電話についてコメントしておきます。NTT, AU の携帯電話の周波数は f=800MHz 帯，PHS は 1.9GHz, 第 3 世代の携帯電話は 2GHz 帯です。NTT docomo の周波数が f =800MHz の場合，その波長は $\lambda = c/f$ =20[cm] となります。これは携帯電話のアンテナの長さとほぼ同じ長さです。携帯電話をカチャット開けたときの長さが 20cm くらいでしょう。iPhone はちょっと小さいですね！

光は電場と磁場が直行した電磁波で，3×10^8[m/s] の速度を持ちます。電磁波はその波長 (λ)，または，振動数 ($f = c/\lambda$) によって様々な名前が付けられています。様々な波長をもった電磁波のなかで，人間の目に見えるものは可視光の領域だけです。ごくわずかですね。しかし目に見えない電磁波は我々の生活で様々な役割を担っています。たとえば，FM ラジオの電波も電磁波です。FM 福岡を聞く時，ラジオを 80.7MHz に合わせます。周波数が $f = 80.7$MHz の電磁波のもつ情報を耳で聞くことが出来るようにしているのがラジオです。FM 福岡のラジオ電磁波の波長は，

$$\lambda = c/f = \frac{3 \times 10^8[m/s]}{80.7 \times 10^6[1/s]} = 3.75[m]$$

となります。これは，3.75[m] の波長を持った sin 波（正弦波）を考えればよい。身長の約 3 倍弱の長さの波長を持った電磁波が，ラジオ局から届いているのです。AM ラジオの NHK 第一放送の周波数は 540kHz=0.54MHz です。では，NHK 第一放送の電波の波長は何メートルでしょうか？計算してみましょう。FM ラジオと AM ラジオで比べると AM ラジオの方が波長が長いということになります。AM 波（中波）の波長の方が FM 波（超中波）より約１００倍長いのです。その他ラジオでは短波放送というのもあります。

電磁波の性質は、「波長の長い（周波数の小さい）電磁波は遠くまで届き，波長の短い（周波数の大きい）電磁波は散乱される！！」ということです。では，AM 波と FM 波ではどちらが遠くまで届くでしょうか？　我々の目に届く太陽の光は可視光線とよばれ，赤・燈・黄・緑・青・藍・紫の 7 色を持った光が一緒になって目に入ってきます。太陽光を直接みるとなんとなくオレンジっぽく見えますが，可視光を全部合わせると白色になります。重要なのは光の 7 色の波長がすべて異なるということです。可視光で一番波長の長い色は「赤」で波長は約 0.7μm。赤色から紫色になるにつれて波長が短くなります。一番波長の短い紫色の波長は約 0.3μm です。交差点の信号機は「赤・黄・青」で作られています。先程言った「波長の長い光（電磁波）は遠くまで届く」という性質を使って，交差点を安全（交通安全）にするにはどうすればいいか？ということを考えると，止まれが赤色なのは納得できますね！！霧の多い日，止まれがもし「青」なら波長の短い光は霧に散乱されて遠くまで届かないことになります。これでは危険ですね。

夕焼けが赤く見える（赤く染まる）のも，波長の短い光（青など）は大気などで散乱されて観

測者には届かず，太陽からまっすぐ進んでくる波長の長い赤い光を見ているからです。天気のいい日，空が青いのは，大気によって散乱された青い光を見ているからです。日本では街灯は白色光が使われているところが多いですが，ヨーロッパなどでは，街灯は文字通りオレンジ色の「街燈」です。オレンジ色の方が雰囲気いいように思うのは私だけでしょうか？

というわけで，我々は毎日，電磁波の中で暮らしているのです。電磁気学は身近にある物理現象の理解に役立つと思いませんか？いろいろと思いを巡らせてください。そしてゆっくり物理を味わってみてください。

7.2.6　マクスウェル方程式の間の関係式

マクスウェル方程式をもう少し眺めてみましょう。

式 (7.1.2) の両辺の div を計算すると，

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = -\vec{\nabla}\cdot(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}), \tag{7.2.31}$$

となります。右辺を書き換えると

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}), \tag{7.2.32}$$

となります。左辺は，任意のベクトル $\vec{E}$ に対して，常に $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = 0$ が成り立つので[*2]，右辺は

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0, \tag{7.2.33}$$

となり，式 (7.1.4) が導かれることがわかりますね。

式 (7.1.4) の両辺の div を計算してみよう。

$$c^2\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = \vec{\nabla}\cdot(\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \vec{j}/\epsilon_0), \tag{7.2.34}$$

ベクトル解析の公式で左辺は常にゼロなので，

$$\vec{\nabla}\cdot(\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \vec{j}/\epsilon_0) = 0, \tag{7.2.35}$$

がなりたちます。したがって，

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) + \frac{1}{\epsilon_0}\vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0, \tag{7.2.36}$$

となります。式 (7.1.1) を代入すると，

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}, \tag{7.2.37}$$

[*2] 任意のベクトル $\vec{A}, \vec{B}$ に対して，$\vec{A}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = 0$ は常に成り立つ。$\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B}$ の方向は 2 つのベクトルに垂直です。したがって $\vec{A}$ と $\vec{C}$ は垂直なので，内積はゼロになります。

が得られます。この式は電荷の保存則と呼ばれています。右辺が電荷密度の時間変化になっていることに注意してください。ガウスの法則的に解釈すると，閉局面 S を通って内側から外側に出て行く電流 $\vec{j}$ は，閉局面 S の内側にある電荷密度の時間変化です。電荷は無くならないのです。

式 (7.1.2) の両辺の rot を計算してみましょう。すると

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\vec{\nabla} \times (\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}), \tag{7.2.38}$$

となります。左辺はベクトル公式

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{\nabla}^2 \vec{E}, \tag{7.2.39}$$

を用います。ここでは，電荷も電流も存在しないとして，$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ とするので，式 (7.2.38) は次のようになります：

$$\begin{aligned} -\vec{\nabla}^2 \vec{E} &= -\vec{\nabla} \times (\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}), \\ &= -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{B}). \end{aligned} \tag{7.2.40}$$

左辺に式 (7.2.4) を代入すると

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \tag{7.2.41}$$

がえられます。これは式 (7.2.19) の電場に対して一般化した波動方程式です。式 (7.2.19) では x 軸に進む波を考えていたことを思い出してください。同様にして，式 (7.2.4) の両辺の rot を計算して，磁場に対して一般化した波動方程式を導きましょう。この波動方程式の解き方は，数学でこれから勉強すると思うのでそちらでしっかり勉強してください。

マクスウェルの方程式の一般解も存在します。興味ある人はさらに勉強してみましょう。

7.3　電磁波の反射と屈折

水に入ったストローが折れ曲がって見えたり，空にかかる虹，雲からもれる太陽光が曲がって見える現象など，光にまつわる多くの現象は光の反射と屈折のことを知っていれば理解することができます。

7.3.1　屈折率

図 7.3 の電場ベクトルの y 成分を

$$E_y = E_0 \cos \omega(t - x/c), \tag{7.3.1}$$

としましょう。ただし，$E_x = E_z = 0$ です。ここで，$\omega(= 2\pi f)$ は角周波数を示します。式 (7.2.2) あるいは，式 (7.2.10) から，磁場（電束密度）ベクトルの z 成分は，

$$B_z = B_0 \cos \omega(t - x/c), \tag{7.3.2}$$

図 7.6　虹

となります（各自で確かめましょう）。ここで，

$$\frac{E_0}{B_0} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c, \tag{7.3.3}$$

という関係があります。同じことを，磁束密度 B ではなく，磁場 H で書くこともできます。

真空ではなく，空気や水などの透明媒質中を電磁波が伝わるときは，真空の誘電率 ϵ_0 や透磁率 μ_0 を使わず，ϵ や μ に変えれば上に式はそのまま使えます。普通の物質では $\mu = \mu_0$ としてよいので，その時の光の速度は

$$c^* = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon/\epsilon_0}}, \tag{7.3.4}$$

となります。

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \times 10^8 m/s, \tag{7.3.5}$$

は，真空中の光の速度，

$$n = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}}, \tag{7.3.6}$$

は，この媒質の屈折率とよびます。空気の屈折率は約 1.0003、水の屈折率は約 1.3330 で, 1（真空の屈折率）より小さくなることはありません。水中に差し込んだ棒が上の方に曲がって見える現象は光の屈折です。この屈折率が重要なのです。雲から太陽の光が放射状に出ているのをみたことはありませんか？これも光の屈折です。

ある媒質中の電磁波の速度 c^* は，媒質の誘電率 ϵ や透磁率 μ の代わりに，角振動数 ω と波数 q を用いて，

$$c^* = \sqrt{\frac{1}{\epsilon \mu_0}} = \frac{\omega}{q}, \tag{7.3.7}$$

となって，波長 λ との関係は

$$q = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c^*}, \tag{7.3.8}$$

となります。

7.3.2　反射と屈折

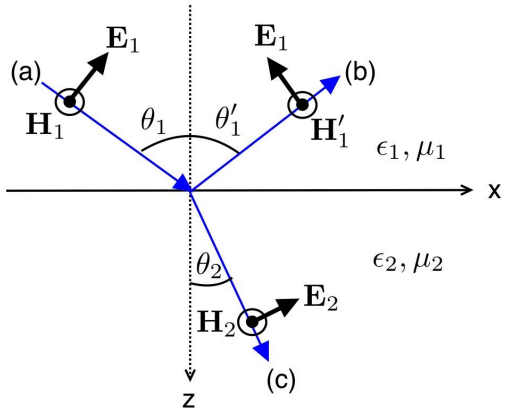

図 7.7　電磁波の反射と屈折。(a) 入射光 (b) 反射光 (c) 屈折光

図 7.7 は，光（電磁波）の直進する例を示しています。図中の $x-y$ 平面上に空気と水の境界面があり，境界面の上側が媒質 1（空気）で下側が媒質 2（水）とします。光が空気から水に入るときを考えながら読んでください。左斜め上から入射した波長 λ の光（(a) 入射光）が空気を通過し平らな水の表面にあたり，光の一部は表面で反射し右上方へ出て行きます（(b) 反射光)。残りの光は空気と水の界面を抜けて水中に入り右下に向かっています（(c) 屈折光)。図の青い矢印は光（電磁波）の進む方向を示しています。式 (7.3.1) と (7.3.2) の電場 $\vec{E}$ と磁場 $\vec{B}$ の方向も図に描いてあります。光の方向は境界面に垂直な法線方向から定義されています。入射角が θ_1，反射角が θ_1'，屈折角が θ_2 です。

反射と屈折は次の 2 つの法則に支配されています。

1. 反射の法則
   反射角は入射角に等しい。
$$\theta_1 = \theta_1', \tag{7.3.9}$$

2. 屈折法則（スネルの法則）
   屈折角 θ_2 と入射角 θ_1 の関係は
$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2, \tag{7.3.10}$$

で与えられます。ここで，n_1, n_2 は媒質の屈折率です。2 つの媒質の屈折率の比によって屈折角が決まるのです。

$$\theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin\theta_1. \tag{7.3.11}$$

したがって，$n_1 = n_2$ のときは，$\theta_1 = \theta_2$ となり，光は曲がることなく直進します。$n_2 > n_1$ のときは，$\theta_2 > \theta_1$ となり，光は法線に近づくように曲げられます。$n_2 < n_1$ のときはその逆になるわ

けです。水中のストローの先から出た光は空気 – 水界面で屈折し，ストローが曲がって見えるのです。

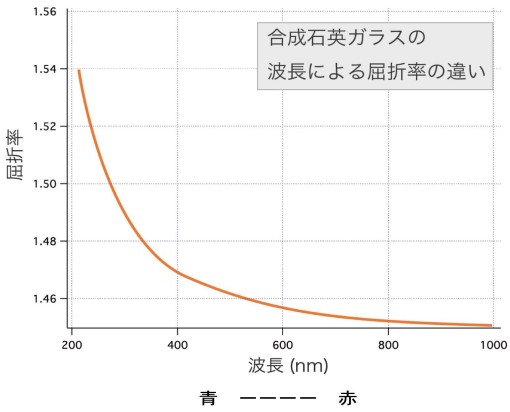

図 7.8　電磁波の色分散

色の分散は虹と密接に関係しています。電磁波は「光の波長によって屈折率が異なる」という性格を持っています。太陽光はいろいろな波長の光で構成されていることは，図 7.5 ですでに説明しました。7.2.5 で学んだように，太陽光は赤から青などざまざまな波長の光があつまった光の束です。屈折率 n に波長依存性があるということは，光が異なる角度に屈折し広がる（分散）するということを意味します。これを，色分散とよびます。図 7.8 は石英ガラスの屈折率を波長の関数として表したグラフです。屈折率は短波長になると大きくなります。したがって，太陽光が石英ガラスと空気の境界面を通過するときは，短波長（青）の方が長波長（赤）より大きく曲げられるのです。夕焼けが赤くなるのもこれが原因です。雨上がり空に虹がかかるのは，小さな雨滴（空中の水滴）による太陽光の色分散のためです。

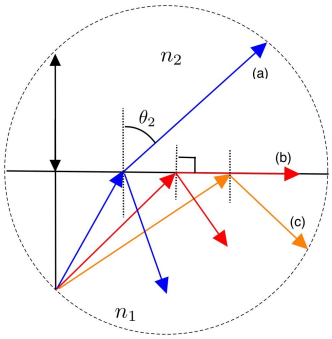

図 7.9　電磁波の全反射

屈折率が大きい媒質から小さい媒質に光が入るとき，入射光が境界面を透過せず，すべて反射する現象を全反射とよびます。。図 7.9 は $n_1 > n_2$ の媒質 1 から媒質 2 へ光が入射する様子を示しています。入射角 θ_1 が大きくなるにつれて，屈折角 θ_2 も大きくなっていきます。入射角がある一定の角度以上のとき，全反射が起こります。この角度のことを臨界角とよびます。臨界角は

$\theta_2 = 90°$(図中 (b)) のときなので，スネルの法則は，

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin(\pi/2) \tag{7.3.12}$$

となり，臨界角は

$$\sin\theta_{1c} = \frac{n_2}{n_1} \tag{7.3.13}$$

で与えられます。$\theta_1 > \theta_{1c}$ の入射角を持つ光は，図中の (c) のように 100 %反射光として媒質 1 から出てきます。スネルの法則は式 (7.3.1) と (7.3.2) を用いて証明することができます。

その他，光やレーザーに関することは幾何光学や波動光学などで学ぶことができます。

7.4 演習問題

1. 電磁波とは何か説明してください。
2. マクスウェル方程式は次の 4 式です。

(1)

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$$

(2)

$$\nabla \times \vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t$$

(3)

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

(4)

$$c^2 \nabla \times \vec{B} = \partial\vec{E}/\partial t + \vec{j}/\epsilon_0$$

また電荷の保存は

(5)

$$\nabla \cdot \vec{j} = -\partial\rho/\partial t$$

で表現されます。次の問いに答えてください。

(a) (3) は (2) の div から得られることを証明してください。

(b) (5) は (4) の div から導かれることを証明してください。（マクスウェル方程式が正しいためには電荷の保存が必要です）

(c) 空な空間 ($\vec{j} = 0, \rho = 0$) でのマクスウェル方程式を書いてください。

(d) 空な空間では電場 $\vec{E}$ は波動方程式

$$\nabla^2\vec{E} - \frac{1}{c^2}\partial^2\vec{E}/\partial t^2 = 0$$

を満たすことを証明してください。((2) の rot を計算する）

(e) 空な空間では磁場 $\mathbf{B}$ も波動方程式

$$\nabla^2\vec{B} - \frac{1}{c^2}\partial^2\vec{B}/\partial t^2 = 0$$

を満たすことを証明してください。

(f) (2) から **E** を次のように書けることを証明してください。

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

ただし，$\vec{A}$ は $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ から定義されます。

3. 電流も電荷も存在しない真空の空間において，次の電磁波はマクスウエルの方程式を満たしていることを証明してください。また、電磁波の伝搬する様子を図示してください。

   電場 $\vec{E}$ の各成分が、

$$E_x = E_y = 0, E_z = \cos(y - ct)$$

   磁場 $\vec{B}$ の各成分が、

$$B_x = \sqrt{\epsilon_0\mu_0}\cos(y - ct), B_y = B_z = 0$$

   ただし $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0} = 3.0 \times 10^8 m/s$ は光の速度、t は時間を示す。

4. 電場の式 (7.3.1) を使って，磁場（電束密度）が式 (7.3.2) となることを確かめてください。

付録 A

輸送現象

このテキストでは，ほとんど粒子の静的な現象を扱ってきました。この付録では，時間変化をともなった動的現象を扱うための運動方程式を紹介し，粒子の運動・輸送について学びましょう。粒子の動きの微視的な理解をするために，運動方程式，ブラウン運動，拡散現象について学びましょう。

A.1　運動方程式

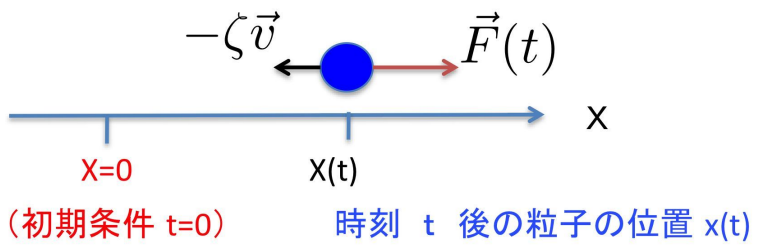

図 A.1　粒子の運動方程式

図 A.1 のように，質量 m のある粒子が，温度 T の溶液中で速度 $\vec{v}$ で右方向へ動いている状況を考えましょう。時刻ゼロ $(t=0)$ での粒子の位置を $x=0$, t 秒後の位置を $x(t)$ とする。粒子に何らかの力 $\vec{F}(t)$ が働いているとする。具体的には力 $\vec{F}(t)$ は，重力やクーロン力などを考えればよい。例えば，水中を電荷を持った DNA などの荷電粒子が，クーロン力 $\vec{F}=q\vec{E}$ によって右方向に動いていると考えてもよいし，水中をコロイド粒子が重力に引かれて沈降している様子を思い浮かべてもよい。

粒子が右に進むとまわりの液体と摩擦が生じます。これが摩擦力であり，速度に比例して $-\zeta\vec{v}$ であたえられます。ここで，ζ は摩擦係数をしめします。点 $x(t)$ での粒子の速度は

$$\vec{v}=\frac{d\vec{x}(t)}{dt}, \tag{A.1.1}$$

です。ある時刻 t での，粒子の運動方程式は

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \zeta\vec{v} + F^R(t), \tag{A.1.2}$$

で与えられます。最後の項の $F^R(t)$ は，まわりの溶媒分子の衝突などから生じるランダム力を示します。熱揺らぎによるランダム力です。この式を，ランジュバン方程式とよびます。もちろん左辺は「質量×加速度」です。等速度運動であれば左辺は常にゼロになります。

A.2　ブラウン運動

A.2.1　ブラウン運動の運動方程式

ここでは，外力 $\vec{F}$ が無い場合を考えましょう。したがって，粒子には熱揺らぎによるランダム力だけが働いている場合に対応します。このようなランダム力を駆動力として動く粒子の運動をブラウン運動とよびます。外力 $\vec{F}$ が無い場合の運動方程式は，

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\zeta\vec{v} + F^R(t), \tag{A.2.1}$$

となります。

この式を解くことを考えましょう。以下では簡単にするために，x 軸方向の 1 次元の運動を考えます。式 (A.2.1) の両辺に x をかけて変形すると，

$$m\left(\frac{d(vx)}{dt} - v^2\right) = -\zeta vx + xF^R(t), \tag{A.2.2}$$

となります。平均を計算すると，

$$m\left(\frac{d\langle vx\rangle}{dt} - \langle v^2\rangle\right) = -\zeta\langle vx\rangle + \langle xF^R(t)\rangle, \tag{A.2.3}$$

となり，ここで，$\langle\cdots\rangle$ は平均量を示します。粒子の平均速度は熱エネルギーが供給しているので，エネルギー等分配則から，

$$m\langle v^2\rangle = k_BT, \tag{A.2.4}$$

が成り立ちます[*1]。さらに，粒子に働く力はランダム力であるので，位置と力には相関はなく

$$\langle xF^R\rangle = \langle x\rangle\langle F^R\rangle = 0, \tag{A.2.5}$$

が成り立ちます。式 (A.2.4) と (A.2.5) を (A.2.3) に代入すると，

$$m\frac{d\langle vx\rangle}{dt} = k_BT - \zeta\langle vx\rangle, \tag{A.2.6}$$

となります。$y = \langle vx\rangle$ として式 (A.2.6) を書き換えると，

$$m\frac{dy}{dt} + \zeta y = k_BT. \tag{A.2.7}$$

[*1] 1 章を参考に。ここでは定数は無視している。

あとはこの微分方程式を y について解けばよいわけです。式 (A.2.7) は線形の微分方程式であり，解法は数学で習うので詳しいことはそちらで勉強して下さい。

まず

$$m\frac{dy}{dt} + \zeta y = 0, \tag{A.2.8}$$

の一般解を求めましょう。式 (A.2.8) は

$$\frac{d(\ln y)}{dt} = -\zeta/m, \tag{A.2.9}$$

に変形できるので，一般解は t で積分して

$$y = c_1 \exp(-\zeta t/m) + c_2, \tag{A.2.10}$$

となります。

初期条件は，時刻 $t = 0$ で粒子は原点にいるので，$y(t = 0) = 0$ を式 (A.2.10) に代入すると，2 つの係数には

$$c_1 + c_2 = 0, \tag{A.2.11}$$

という条件式が得られます。式 (A.2.10) に代入すると，

$$y = c_1 \exp(-\zeta t/m) - c_1, \tag{A.2.12}$$

を得ます。式 (A.2.12) を，(A.2.7) に代入して定数 c_1 を求めると，

$$c_1 = -k_B T/\zeta, \tag{A.2.13}$$

となり，したがって y を使って，

$$y = \langle xv \rangle = \langle x\frac{dx}{dt} \rangle = \frac{1}{2}\frac{d\langle x^2 \rangle}{dt}, \tag{A.2.14}$$

とかけるので，$\langle x^2 \rangle$ の運動方程式は式 (A.2.12) から，

$$\frac{1}{2}\frac{d\langle x^2 \rangle}{dt} = \frac{2k_B T}{\zeta}\Big(1 - \exp\big(-\zeta t/m\big)\Big), \tag{A.2.15}$$

で与えられます。

まだまだ，続きます。両辺を時間 t で積分すると

$$\begin{aligned}\langle x^2 \rangle &= \frac{2k_B T}{\zeta}\int_0^t \Big(1 - \exp\big(-\zeta t/m\big)\Big)dt, \\ &= \frac{2k_B T}{\zeta}\Big(t + \tau e^{-t/\tau} + C\Big)\end{aligned} \tag{A.2.16}$$

となります。ここで

$$\tau = m/\zeta, \tag{A.2.17}$$

は緩和時間を示します。初期条件，時刻 $t = 0$ で $\langle x^2 \rangle = 0$ であるので，式 (A.2.16) に代入すると，定数 C は

$$C = -\tau, \tag{A.2.18}$$

となります。したがって，式 (A.2.7) の解は，

$$\langle x^2 \rangle = \frac{2k_BT}{\zeta}\left(t - \tau(1 - e^{-t/\tau})\right) \tag{A.2.19}$$

で与えられます。$\langle x \rangle$ の平均値はランダムに運動するので常に，

$$\langle x \rangle = 0 \tag{A.2.20}$$

です。さて，この解にはとても重要な分子運動の現象が含まれています。式 (A.2.17) は緩和時間 (τ) の定義です。摩擦係数 ζ は $[Pa \cdot s \cdot m]$ の単位を持つので τ は時間の単位 $[s]$ をもちます。熱揺らぎによって緩和時間 (τ) ごとに全くランダムにその向きを変える。以下では，緩和時間より短い時間の運動と，長い時間の運動について見ていきましょう。

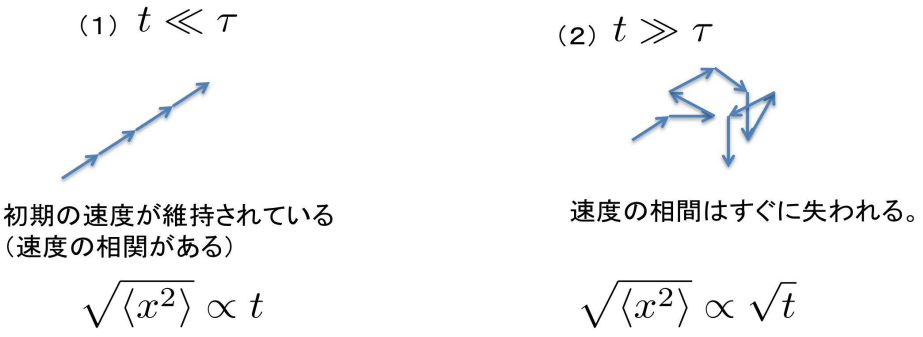

図 A.2　運動している粒子の軌跡

A.2.2　短時間の緩和現象

緩和時間より十分短い時間では，$t \ll \tau$ なので，式 (A.2.19) の $\exp(\cdots)$ をテーラー展開することができ，

$$e^{-t/\tau} = 1 - (t/\tau) + \frac{1}{2}(t/\tau)^2 + \cdots, \tag{A.2.21}$$

となります。式 (A.2.21) を (A.2.19) に代入すると，

$$\langle x^2 \rangle = \frac{k_BT}{\zeta}\frac{t^2}{\tau}, \tag{A.2.22}$$

となりなす。したがって，平均行程距離の 2 乗平均の平方根は

$$\sqrt{\langle x^2 \rangle} = t\sqrt{\frac{k_BT}{m}}, \tag{A.2.23}$$

となり，時間に比例することがわかります。これを使って，粒子の平均速度

$$v = \frac{d}{dt}(\sqrt{\langle x^2 \rangle}) = \sqrt{\frac{k_BT}{m}}, \tag{A.2.24}$$

がえられます。この関係式は，第 1 章で説明しました。すなわち，熱エネルギーがすべて運動エネルギーに変わる場合，粒子の平均速度は式 (A.2.24) で与えられます。つまり，$t \ll \tau$ の短い時間では粒子は”一定速度”の熱平衡速度で動いている。この短い時間では，初期の速度が維持されて，ニュートン力学的（決定論的）な運動をする。式 (A.2.23) で見たように，粒子の位置は時間に比例して直線的に動きます (図 A.2(1))。

A.2.3　長時間の緩和現象

緩和時間より十分長い時間では，$t \gg \tau$ なので，$e^{-t/\tau} \simeq 0$ としてよい。したがって，式 (A.2.19) から，

$$\langle x^2 \rangle = \frac{2k_B T}{\zeta} t, \tag{A.2.25}$$

となります。平均行程距離の 2 乗平均の平方根は

$$\sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{\frac{k_B T}{m} t} \quad \propto \sqrt{t}, \tag{A.2.26}$$

となり，時間の 0.5 乗に比例することがわかります。このような運動は，確率論的運動であり，ランダムウォークやブラウン運動とよばれています。緩和時間 τ ごとに全くランダムに粒子の進む向きが変わります (図 A.2(2))。式 (A.2.23) の決定論的運動との違いに注意してください。式 (A.2.26) をもちいて，粒子の平均速度は

$$v = \frac{d}{dt}(\sqrt{\langle x^2 \rangle}) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2k_B T}{\zeta}} \frac{1}{\sqrt{t}}, \tag{A.2.27}$$

で与えられます。緩和時間より十分長い時間では，速度は時間がたつにつれて遅くなることを示します。つまり，溶媒分子との摩擦 (ζ) によって粒子の速度はだんだん遅くなるのです。式 (A.2.24) との違いに注意してください。

式 (A.2.25) から，

$$\langle x^2 \rangle = \frac{2k_B T}{\zeta} t = 2Dt, \tag{A.2.28}$$

とおいて，

$$D = \frac{k_B T}{\zeta}, \tag{A.2.29}$$

を拡散定数とよび，$[cm^2/s]$ の単位を持ちます。また，摩擦係数は溶媒の粘度 (η) と粒子の半径 (R) を用いて，

$$\zeta = 6\pi\eta R \tag{A.2.30}$$

で与えられます。式 (A.2.29) は熱ゆらぎの大きさを表す拡散係数 (D) と，エネルギーの散逸を表す摩擦係数 (ζ) との間の関係式を示していて，アインシュタインの関係式ともよばれています。拡散定数が大きいとは，粒子は熱運動によって単位時間当たり動く範囲が広いことを意味します。拡

散定数は熱エネルギーに比例し，摩擦に反比例します。演習問題で，具体的にどの程度の拡散定数になるか計算してみましょう。式 (A.2.30) から明らかなように，粒子の半径が小さいほど摩擦が小さくなり，拡散係数は大きくなることが解ります。

A.3　拡散現象

この章ではブラウン運動による粒子の拡散について詳しく見ていきましょう。

A.3.1　フィックの方程式

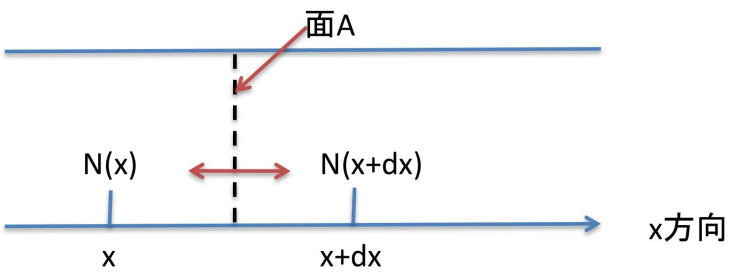

図 A.3　粒子の拡散

粒子の濃度が非一様な分布をしているとき，その分布の時間変化を記述することを考えましょう。いま，図 A.3 のように，時刻 t での x 軸上の粒子の数 $N(x)$ が解ってるとしましょう。単位時間に単位面積を通ってどれだけの粒子が位置 x から $x+dx$ に移動するかを考えます。これを考えるのにランダムウオークを考えるとわかりやすい。時刻 $t+dt$ 後には，x にいる粒子の半分は点線を横切り右へ移動し，$x+dx$ にいる粒子の半数は点線を通って左へ移動していると考えると，面 A を通って右へ流れる粒子数は

$$-\frac{1}{2}[N(x+dx)-N(x)] \tag{A.3.1}$$

です。x 軸方向の流束 (Flux) は，式 (A.2.30) を x 軸に垂直な面積 A と時間間隔 dt で割れば，

$$J_x = -\frac{1}{2}[N(x+dx)-N(x)]/(Adt), \tag{A.3.2}$$

で与えられます。式 (A.3.2) を変形すると，

$$J_x = -\frac{(dx)^2}{2dtdx}\left[\frac{N(x+dx)}{Adx}-\frac{N(x)}{Adx}\right] = -\frac{D}{dx}\Big[c(x+dx)-c(x)\Big], \tag{A.3.3}$$

となります。ここで，

$$c(x) = N(x)/(Adx), \tag{A.3.4}$$

な濃度（数濃度）であり，D は拡散定数

$$D = \frac{(dx)^2}{2dt}, \tag{A.3.5}$$

です。したがって，流束 (A.3.3) は

$$J_x = -D\frac{dc}{dx}, \tag{A.3.6}$$

で与えられます。流束は濃度勾配に比例します。この関係式をフィックの第 1 法則とよびます。

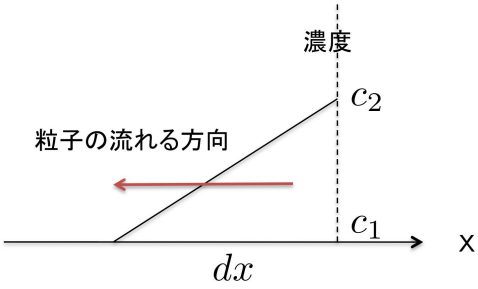

図 A.4　流束の意味

図 A.4 に示すように，濃度が c_1 と c_2 の dx 離れた 2 点間で左の方向に粒子が流れる場合，流束は

$$J_x = -D\frac{c_2 - c_1}{dx}, \tag{A.3.7}$$

であたえられます。流束の単位は $[mol \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}]$ です。dx が十分小さいとき微分の形 (A.3.6) で書けます。

A.3.2　拡散方程式

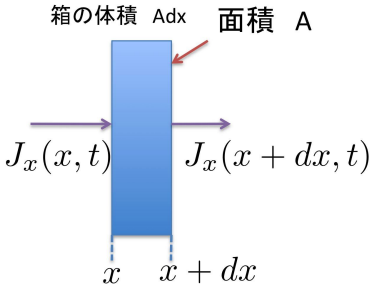

図 A.5　拡散の意味

流束を使って粒子の運動についての微分方程式を考えることが出来ます。図 A.5 に示したように，面積 A の領域を左から右へ粒子が流れているとき，点 x での流束 $J_x(x,t)$ と点 $x+dx$ での流束 $J_x(x+dx,t)$ を考えましょう。点 x での粒子数は $J_x(x)Adt$ であり面積 A の領域を左から入り右に出ていきます。箱の体積は Adx です。粒子数は保存されるので，箱の中の単位体積当たりの

粒子数は

$$\frac{1}{dt}[c(t+dt)-c(t)] = \frac{-1}{dt}\left(\frac{J_x(x+dx)Adt}{Adx} - \frac{J_x(x)Adt}{Adx}\right)$$
$$= \frac{-1}{dx}[J_x(x+dx)-J_x(x)], \tag{A.3.8}$$

で変化します。$dt=0$, $dx=0$ の極限で，この式は

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{\partial J_x}{\partial x} \tag{A.3.9}$$

となり，式 (A.3.6) を使って，

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \tag{A.3.10}$$

が得られます。この式はフィックの第 2 方程式であり，拡散方程式とよばれています。これは，位置 x と時間 t における粒子の濃度 $c(x,t)$ の時間変化（左辺）が，濃度の曲率 (右辺）に比例することを意味し，その比例定数が拡散定数となります。この拡散方程式の解は

$$c(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\exp\left[-\frac{x^2}{4Dt}\right], \tag{A.3.11}$$

で与えれます。この式は，分子の拡散の様子を示すことができる。例えば，水面にインクを落としたときのインクの拡散過程がこの式で表される。図 A.6 はある拡散定数 D の時の，粒子濃度 c の時間発展を示します。$t=0$ で中心にあったインクの粒子が時間とともに周囲に拡散していることを示しています。十分時間が経つと ($t=t_2$)，インクの濃度は均一になります。

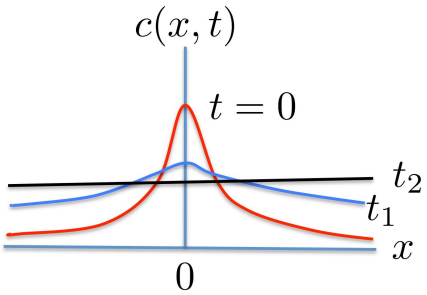

図 A.6　粒子濃度の拡散

A.4　補足

A.4.1　単位

- 粘度 (η) の単位：$[Pa\cdot s] = [N\cdot m^{-2}\cdot s]$

A.5　演習問題

1. リゾチーム分子の緩和時間と，拡散定数を求めましょう。
   (a) 温度 $T = 300[K]$ で水中のリゾチーム分子の緩和時間と，拡散定数をもとめてください。ただし，水の粘度は $\eta = 8.9 \times 10^{-4}[Pa \cdot s]$, リゾチームの分子量は $m = 1.4 \times 10^{4}[g/mol]$, リゾチームの直径は $R = 100[nm]$ です。計算には MKSA 単位系を用いて計算すること。求めた緩和時間を用いて，リゾチームの運動の様子を議論してください。
   (b) 温度 $T = 400[K]$ で水中のリゾチーム分子の緩和時間と，拡散定数をもとめ，運動について議論してください。温度 $T = 300[K]$ の運動と比べて議論してください。